Módulo Quadriláteros

Quadriláteros Inscritos e Circunscritos

9° ano E.F.

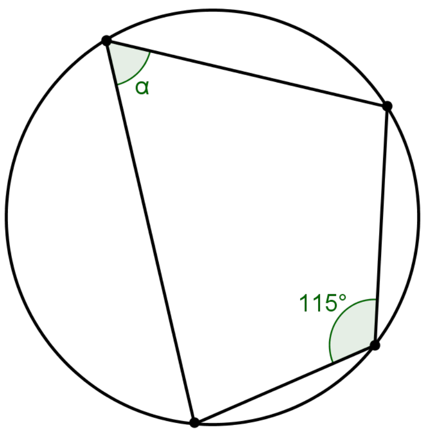
Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

Portal da Matemática
OBMEP

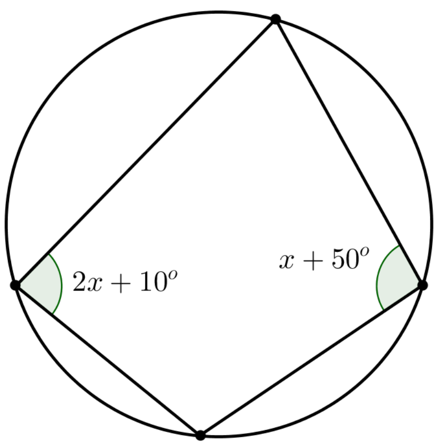
1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Seja um quadrilátero inscritível $ABCD$, no qual $\angle ABC = 40^o$ e $\angle BCD = 80^o$. Determine $\angle CDA$ e $\angle DAB$.

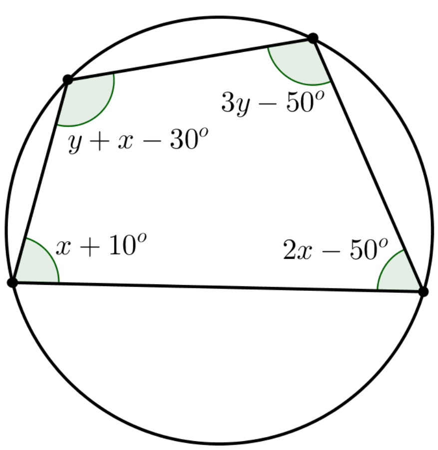
Exercício 2. Determine o valor de α no quadrilátero abaixo.



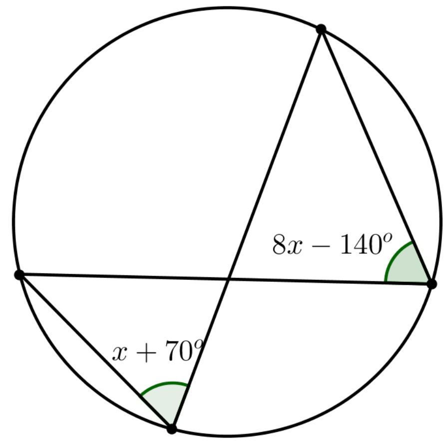
Exercício 3. Determine o valor de x no quadrilátero abaixo.



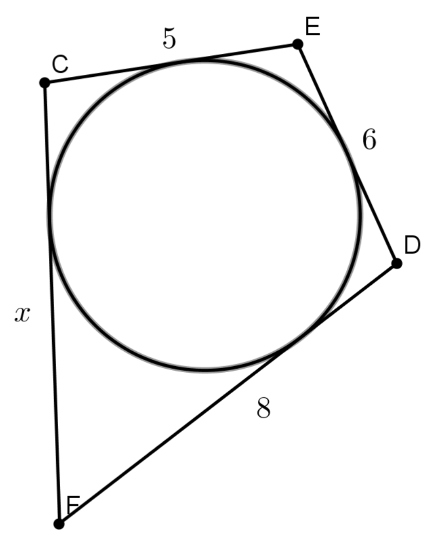
Exercício 4. Determine os valores de x e y no quadrilátero inscritível abaixo.



Exercício 5. Determine o valor de x na figura.

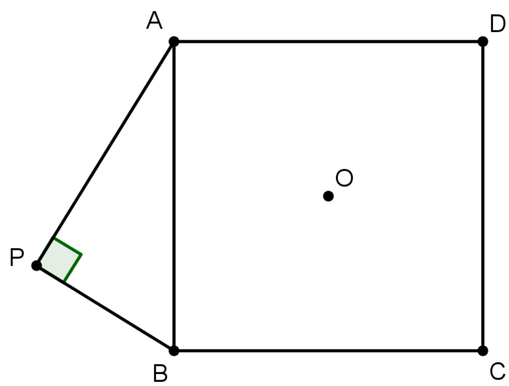


Exercício 6. Determine o valor de x no quadrilátero da figura.

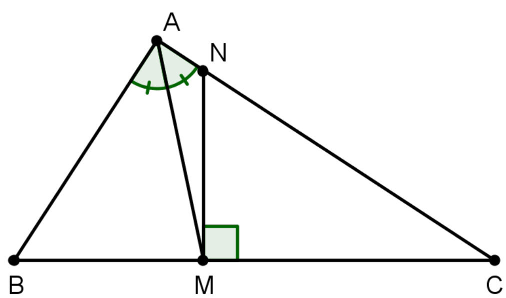


2 Exercícios de Fixação

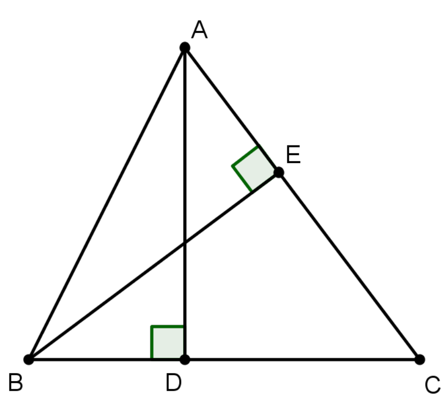
Exercício 7. Na figura, $ABCD$ é quadrado de centro O. Determine a medida de $\angle BPO$.



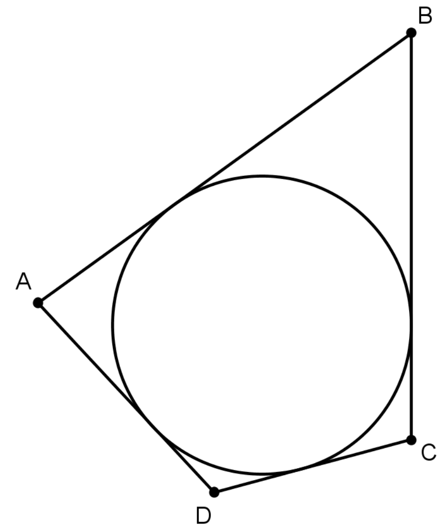
Exercício 8. Na figura abaixo, $\triangle ABC$ é retângulo em A, AM é bissetriz e MN é perpendicular a BC. Determine $\angle MBN$.



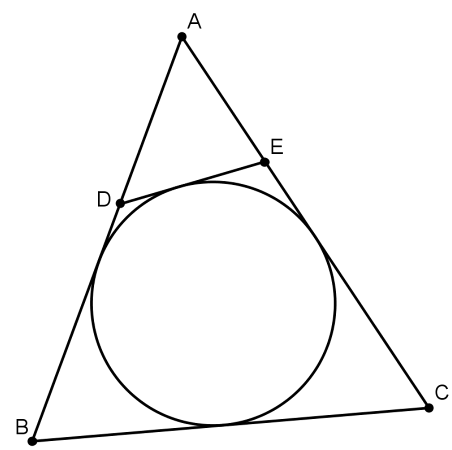
Exercício 9. Sabendo que $\angle BAC = 64^o$, na figura, determine a medida de $\angle ADE$.



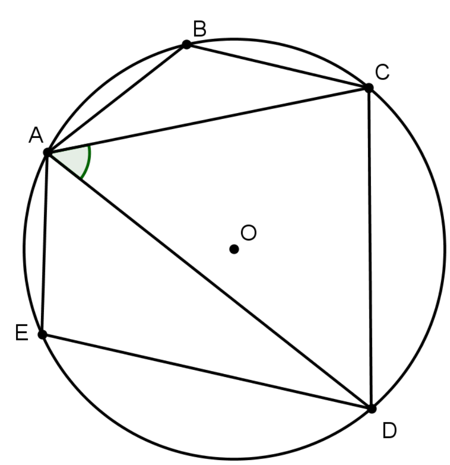
Exercício 10. Os lados do quadrilátero circunscrito da figura medem $AB = x + 3$, $BC = 4x$, $CD = 2x$ e $DA = x + 1$. Determine o valor de x.



Exercício 11. Na figura, o perímetro do triângulo ABC é $20cm$ e o lado BC mede $8cm$. Determine o perímetro do triângulo ADE.



Exercício 12. Todos os vértices do pentágono $ABCDE$ estão sobre um mesmo círculo. Se $\angle DAC = 50^o$, determine $\angle ABC + \angle AED$.

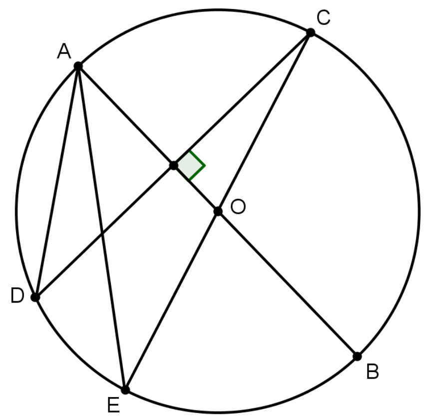


Exercício 13. Seja O o centro da circunferência circunscrita ao triângulo acutângulo ABC e seja D a projeção de A sobre BC. Prove que $\angle DAB = \angle OAC$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 14. Seja um triângulo ABC, retângulo em A, de semiperímetro igual a $15cm$ e $BC = 13cm$. Determine a medida do raio da circunferência inscrita neste triângulo.

Exercício 15. Na figura, o ponto O é o centro da circunferência que passa pelos pontos A, B, C, D e E. Sabendo que o diâmetro AB e a corda CD são perpendiculares e que $\angle BCE = 35^o$ o valor em graus do ângulo $\angle DAE$ é:



a) 35^o.

b) 10^o.

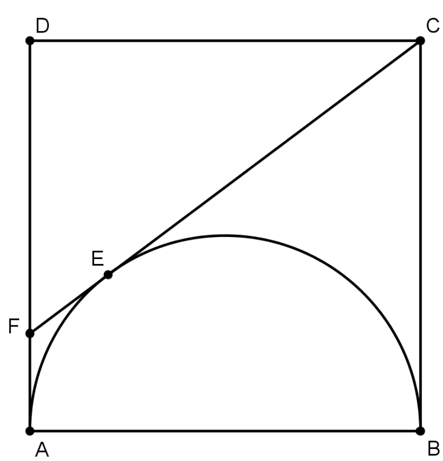
c) 20^o.

d) 30^o.

e) 55^o.

Exercício 16. No triângulo acutângulo ABC, o ângulo $\angle BAC$ mede 45^o. Sejam BE e CF alturas com E sobre AC e F sobre AB, e O o circuncentro de ABC, ou seja, o centro do círculo que passa por A, B e C. Calcule a medida do ângulo $\angle EOF$.

Exercício 17. No desenho, o segmento CF é tangente ao semicírculo de diâmetro AB. Se $ABCD$ é um quadrado de lado 4, determine o comprimento de CF.



a) $\frac{9}{4}$.

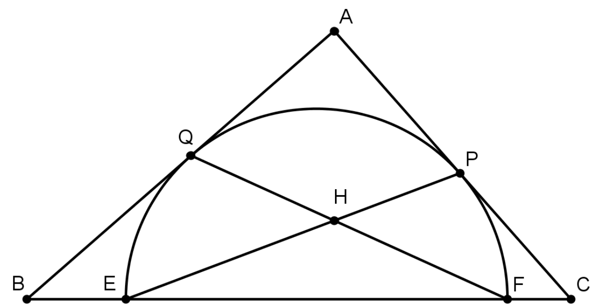
b) 3.

c) 4.

d) $\frac{5}{4}$.

e) 5.

Exercício 18. Um semicírculo de diâmetro EF, situado no lado BC do triângulo ABC, é tangente aos lados AB e AC em Q e P, respectivamente. As retas EP e FQ se encontram em H. Mostre que AH é a altura do triângulo.



Respostas e Soluções.

1. Se o quadrilátero é inscritível, a soma dos ângulos opostos é 180^o. Temos então $\angle CDA = 180^o - \angle ABC = 180^o - 40^o = 140^o$ e $\angle DAB = 180^o - \angle BCD = 180^o - 80^o = 100^o$.

2. Como o quadrilátero é inscritível, então a soma de ângulos opostos é 180^o, ou seja, $\alpha = 180^o - 115^o = 65^o$.

3. Como a soma dos ângulos opostos é 180^o, pois o quadrilátero é inscritível, temos $2x + 10^o + x + 50^o = 180^o$, segue que $x = 40^o$.

4. Como o quadrilátero é inscritível, temos:

$$\begin{cases} y + x - 30^o + 2x - 50^o = 180^o \\ x + 10^o + 3y - 50^o = 180^o \end{cases},$$

que é equivalente a:

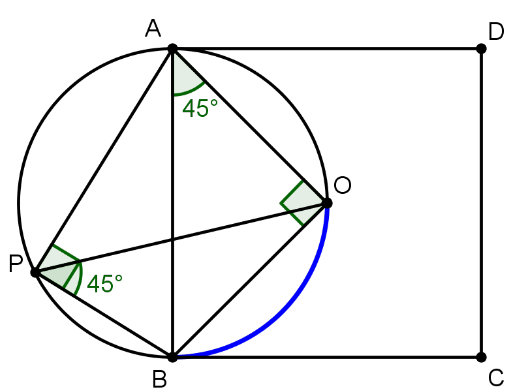
$$\begin{cases} y + 3x = 260^o \\ 3y + x = 220^o \end{cases},$$

donde encontramos $x = 70^o$ e $y = 50^o$.

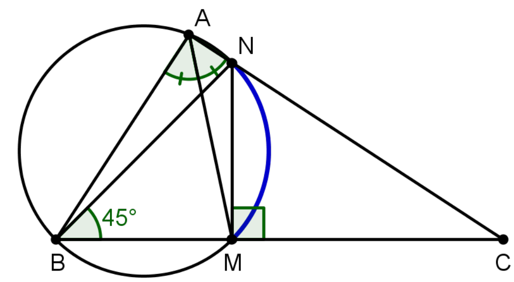
5. Como os dois ângulos destacados são inscritos na mesma circunferência e "olham" para o mesmo arco, eles são congruentes, temos então $x + 70^o = 8x - 140^o$, segue que $x = 30^o$.

6. Como o quadrilátero é circunscritível, temos $x + 6 = 8 + 5$, segue que $x = 7$.

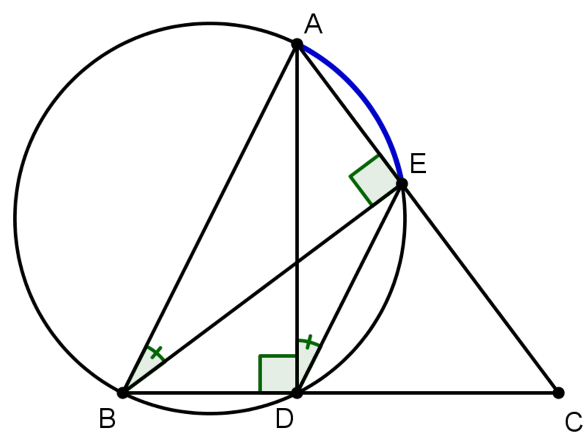
7. (Extraído da Vídeo Aula) Como o ponto O é o centro do quadrado, ou seja, a intersecção das diagonais, $\angle AOB = 90^o$. Assim, o quadrilátero $APBO$ é inscritível, pois $\angle APB + \angle AOB = 180^o$. Temos também que os ângulos $\angle BPO$ e $\angle BAO = 45^o$ são inscritos na referida circunferência, "olhando" para o mesmo arco, ou seja, são congruentes, segue que $\angle BPO = 45^o$.



8. (Extraído da Vídeo Aula) Como $\angle BMN = \angle BAN = 90^o$ e, por isso, $\angle BMN + \angle BAN = 180^o$, o quadrilátero $ABMN$ é inscritível. Sendo assim, $\angle MBN$ e $\angle MAN$ "olham" para o mesmo arco dessa circunferência, ou seja, $\angle MBN = \angle MAN = 45^o$.



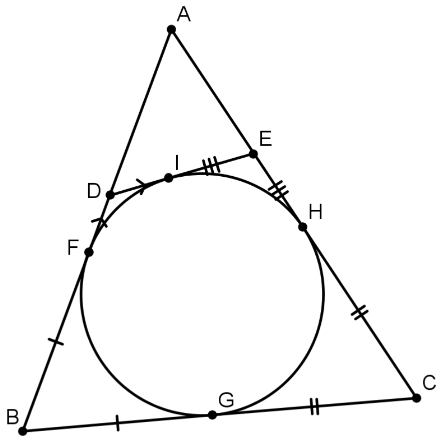
9. (Extraído da Vídeo Aula) Note que o quadrilátero $ABDE$ é inscritível, pois AB é hipotenusa comum dos triângulos retângulos ABE e ABD. Perceba também que, pelo $\triangle ABE$, $\angle ABE = 180^o - 90^o - 64^o = 26^o$. Como $\angle ABE$ e $\angle ADE$ são ângulos inscritos a uma mesma circunferência e "olham" para um mesmo arco, eles são congruentes, ou seja, $\angle ADE = \angle ABE = 26^o$.



10. (Extraído da Vídeo Aula) Como o quadrilátero é circunscritível, temos:

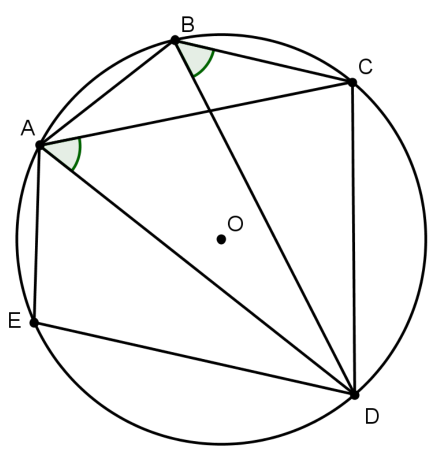
$$\begin{aligned} AB + CD &= BC + DA \\ x + 3 + 2x &= 4x + x + 1 \\ -2x &= -2 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

11. (Extraído da Vídeo Aula) Vamos marcar os pontos F, G, H, I, tangentes à circunferência e pertencentes, respectivamente, aos lados BD, BC, CE e ED, do quadrilátero $DBCE$. Como a circunferência é inscrita ao quadrilátero $DBCE$, temos $BG = BF$ e $CG = CH$ e, consequentemente, $BF + CH = BG + CG = 8cm$. Além disso, se o perímetro do triângulo ABC é $20cm$, então $AF + AH = 20 - 8 = 12cm$. Por fim, se $FD = DI$ e $HE = EI$, então o perímetro do triângulo ADE tem mesma medida de $AF + AH$, ou seja, $12cm$.

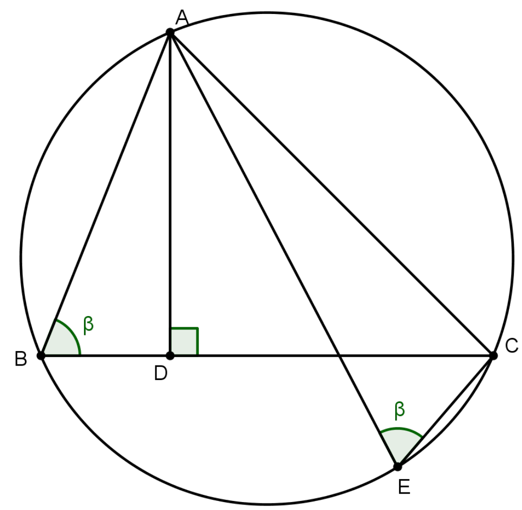


12. (Extraído do Banco de Questões OBMEP - 2016) Como ângulos inscritos associados a um mesmo arco são iguais, temos $\angle DAC = \angle DBC$. Além disso, sabendo que a soma dos ângulos opostos de um quadrilátero inscritível é 180^o, segue que:

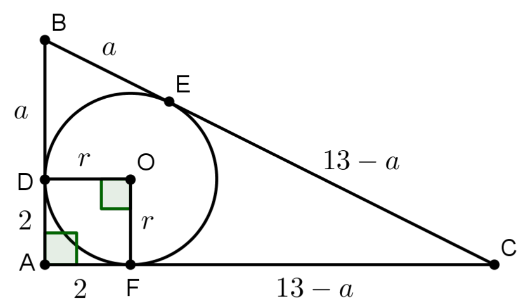
$$\begin{aligned}\angle ABC + \angle AED &= (\angle ABD + \angle AED) + \angle DBC \\ &= 180^o + \angle DAC \\ &= 180^o + 50^o \\ &= 230^o.\end{aligned}$$



13. Seja AE um diâmetro. Temos $\angle ABC = \angle AEC$ e $\angle ADB = \angle ACE = 90^o$, ou seja, os triângulos ABD e AEC são semelhantes. Portanto, $\angle BAD = \angle EAC = \angle OAC$.



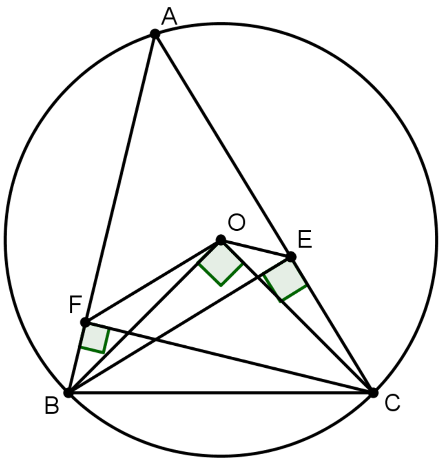
14. (Extraído da Vídeo Aula) Marcando os pontos D, E e F, da circunferência inscrita ao triângulo ABC, tangentes, respectivamente, aos lados AB, BC e CA, temos $DB = BE = a$, $EC = CF = 13 - a$ e $FA = AD = \dfrac{30 - 26}{2} = 2cm$. Se A é ângulo reto e sendo O o centro da circunferência inscrita ao triângulo ABC, o quadrilátero $OFAD$ é quadrado e o raio da circunferência mede $2cm$.



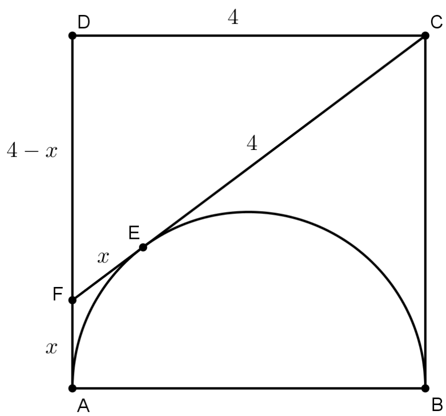
15. (Extraído da OBM - 2013) $\angle BCE$ é ângulo inscrito à circunferência "olhando"para o arco BE, assim $\angle BOE = 70^o$ e $\angle AOC = 70^o$, opostos pelo vértice. Pelo triângulo formado pelos vértices C, O e intersecção entre AB e CD temos $\angle DCE + 70^o + 90^o = 180^o$, segue que $\angle DCE = 20^o$. Como $\angle DAE$ e $\angle DCE$ são ângulos inscritos "olhando"para o mesmo vértice, são congruentes, ou seja, $\angle DAE = 20^o$. Resposta C.

16. (Extraído da OBM - 2015) O arco BC mede $2 \cdot \angle BAC = 2 \cdot 45^o = 90^o$, logo $\angle BOC = 90^o = \angle BEC$. Portanto o quadrilátero $BOEC$ é inscritível e $\angle EOC = \angle EBC = 90^o - \angle ACB$. Analogamente, $\angle FOB = 90^o - \angle ABC$. Portanto:

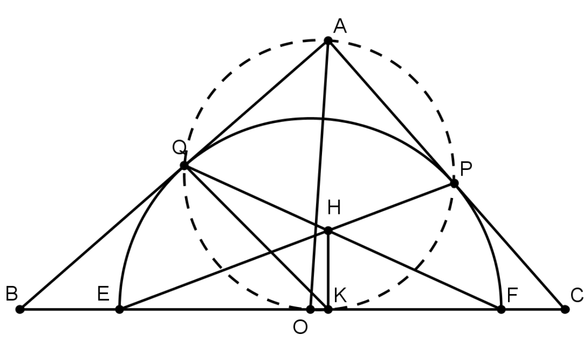
$$\begin{aligned}\angle EOF &= \angle FOB + 90^o + \angle EOC \\ &= 90^o - \angle ACB + 90^o + 90^o - \angle ABC \\ &= 90^o + \angle BAC \\ &= 90^o + 45^o \\ &= 135^o.\end{aligned}$$



17. (Extraído da OBM - 2015) Seja x o comprimento do segmento FA. Como FC é tangente ao semicírculo, segue que $FE = FA = x$ e $CE = CB = 4$. Consequentemente, $DF = 4 - x$ e $FC = 4 + x$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo DCF, obtemos $4^2 + (4 - x)^2 = (4 + x)^2$, segue que $x = 1$ e, por consequência, $FC = 5$. Resposta E.



18. (Extraído do Banco de Questões OBMEP - 2016) Sejam K o pé da perpendicular de H ao segmento BC e O o centro do semicírculo. Suponha sem perda de generalidade que K está no segmento OC.



Como EF é um diâmetro, segue que $\angle EQF = \angle HKE = 90^o$ e consequentemente $EQHK$ é um quadrilátero inscritível em um círculo de diâmetro EH. Daí segue que $\angle HKQ = \angle QEH = \angle QEP = \dfrac{\angle QOP}{2}$. Analisando os triângulos AQO e AOP, temos $QA = AP$, $QO = OP$ e $AO = AO$. Portanto, pelo caso de congruência LLL, os triângulos AQO e APO são congruentes. Assim $\dfrac{\angle QOP}{2} = \angle QOA$ e:

$$\begin{aligned} \angle QKO &= 90^o - \angle HKQ \\ &= 90^o - \frac{\angle QOP}{2} \\ &= 90^o - \angle QOA \\ &= \angle QAO, \end{aligned}$$

pois $\angle OQA = 90^o$. Consequentemente, $QAKO$ é um quadrilátero inscritível. Lembrando que $\angle OQA = 90^o$, o diâmetro de tal círculo é AO. Daí, $\angle AKO = 90^o$ e tanto AK quanto HK são perpendiculares a BC. Portanto, A, H e K são colineares e, finalmente, AH é altura do triângulo.

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com