Aplicações das Técnicas Desenvolvidas

Soluções de Exercícios e Tópicos Relacionados a Combinatória

2^a **série E.M.**

Professores Tiago Miranda e Cleber Assis

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Aplicações das Técnicas Desenvolvidas
Soluções de Exercícios e Tópicos Relacionados a Combinatória

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. De quantas maneiras podemos colocar, em cada espaço abaixo ($\square$), um dentre os algarismos 4, 5, 6, 7, 8, 9, de modo que todos os seis algarismos apareçam e formem, em cada membro, números de dois algarismos que satisfazem a dupla desigualdade?

$$\square\,\square > \square\,\square > \square\,\square$$

Exercício 2. Quantos inteiros positivos menores que 30 têm exatamente quatro divisores positivos?

Exercício 3. Para descobrir a quantidade de divisores positivos de um número inteiro positivo n basta encontrar sua fatoração em primos e calcular o produto dos expoentes dos primos acrescidos de 1. Por exemplo, $2800 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7$ possui $(4+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1) = 5\cdot 3\cdot 2 = 30$ divisores positivos.

a) Calcule a quantidade de divisores positivos de 3600.

b) Quantos desses são pares?

c) Quantos desses são quadrados perfeitos?

Exercício 4. O símbolo $n!$ é usado para representar o produto dos números naturais de 1 a n, isto é, $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1$. Por exemplo, $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$. Se $n! = 2^{15}\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13$, qual é o valor de n?

Exercício 5. De um baralho comum de 52 cartas são retiradas, em sequência e sem reposição, duas cartas. De quantos modos isso pode ser feito de maneira que a primeira carta seja de it ouros e a segunda carta não seja uma *dama*?

Exercício 6. Para cada subconjunto A de $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, seja $\pi(A)$ o produto de seus elementos. Por exemplo, $\pi(\{1,2,4,5\}) = 40$ e $\pi(A) = 10! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 10$. Por convenção, adote $\pi(\emptyset) = 1$. Qual a soma de todos os 2^{10} produtos $\pi(A)$?

Exercício 7. O número 2014 tem quatro algarismos distintos, um ímpar e três pares, sendo um deles 0. Quantos números possuem exatamente essas características?

Exercício 8. Em um certo comitê, cada membro pertence a exatamente a 4 subcomitês e cada subcomitê contém exatamente 38 membros. Se existem 2014 membros, qual o número C de subcomitês?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 9. Dizemos que dois ou mais números, com a mesma quantidade de algarismos, são membros da mesma família, quando todos possuem pelo menos um algarismo em comum. Por exemplo, os números 32, 25 e 22 pertencem à mesma família, enquanto que 123, 245 e 568 não pertencem à mesma família, pois 123 e 568 não pertencem à mesma família. Qual é a maior quantidade de membros de uma família, cujos elementos têm três algarismos?

Exercício 10. Um número natural n é dito elegante se pode ser escrito como soma de cubo com um quadrado ($n = a^3 + b^2$, onde $a, b \in \mathbb{N}$). Entre 1 e 1000000 existem mais números que são elegantes ou que não são?

Exercício 11. De quantas maneiras podemos colocar um rei preto e um rei branco em um tabuleiro de xadrez (8×8) sem que nenhum deles ataque o outro?

Exercício 12. Encontre a quantidade Z de números de 8 algarismos distintos e não nulos. Quantos números de 8 algarismos distintos e não nulos são divisíveis por 9?

Exercício 13. Considere os números de dez algarismos, sendo eles 1, 2 ou 3, de modo que dois algarismos vizinhos diferem de 1. Quantos números assim formados existem?

Exercício 14. Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{12})$ uma permutação de $(1, 2, 3, \ldots, 12)$ de modo que

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6 \text{ e } a_6 < a_7 < a_8 < a_9 < a_{10} < a_{11} < a_{12}.$$

Um exemplo seria $(6,5,4,3,2,1,7,8,9,10,11,12)$. Qual o número de permutações que podem ser formadas obedecendo essas regras?

Exercício 15. Considere todos os subconjuntos de 1000 elementos do conjunto $\{1,2,3,\ldots,2015\}$. De cada subconjunto escolha o menor elemento. A média aritmética de todos esses elementos mínimos de cada subconjunto é a fração irredutível $\dfrac{p}{q}$. Calcule $p+q$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 16. Quantos são os naturais pares que se escrevem com três algarismos distintos?

Exercício 17. Seja

$$x = 101! \cdot \left(\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{99}{100!} \right).$$

Qual o valor de $101! - x$?

Exercício 18. Qual o maior inteiro positivo n tal que $(2011!)!$ é divisível por $((n!)!)!$?

Exercício 19. Led, um famoso herói de jogos, tem um novo desafio: abrir o portal do dragão. O portal possui 10 cadeados distintos. Para o portal ser aberto, o herói deve possuir pelo menos uma chave para cada cadeado. Para conseguir as chaves dos cadeados, Led deve abrir caixas espalhadas pelo jogo. Existem 45 caixas em tal jogo e cada uma delas contém duas chaves distintas. Além disso, cada chave abre exatamente um dos 10 cadeados, duas chaves de uma mesma caixa abrem cadeados diferentes e não existem duas caixas tais que suas chaves abrem exatamente os mesmos dois cadeados. Qual o número mínimo de caixas que Led deve abrir para garantir a posse de 10 chaves distintas e assim abrir o portal?

Exercício 20. O jovem Alberto tem 2009 cubos $1 \times 1 \times 1$, formando um bloco retangular. Ele possui também 2009 cartões adesivos 1×1 que irá usar para colar em toda a superfície externa do bloco, sem superpor cartões. Quando ele terminar a tarefa, quantos cartões sobrarão?

Exercício 21. Quantos são os números ímpares, de cinco algarismos, nos quais a soma dos algarismos das unidades e das dezenas é 16 e a soma de todos os algarismos é um múltiplo de 5?

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com

Respostas e Soluções.

1. Note que basta que o algarismo das dezenas do primeiro membro seja maior do que o algarismo das dezenas do segundo membro, que por sua vez, seja maior que o algarismo das dezenas do terceiro membro. Há $\binom{6}{3} = 20$ maneiras de escolhermos três algarismos para serem os algarismos mais à esquerda dos três membros; o maior vai para o primeiro membro, o do meio para o segundo membro e o menor, para o terceiro membro. Feito isso, permutamos os outros três algarismos entre as unidades, obtendo $3! = 6$ possibilidades. Assim, podemos preencher a dupla desigualdade de $20 \cdot 6 = 120$ maneiras.

2. (OBM $-$ 2011**)**
As possíveis fatorações em primos de tais inteiros são: p^2 ou $p \times q$. Como esses inteiros são menores que 30, devemos ter $p, q \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$. A lista dos 9 inteiros positivos que satisfazem essa condição é:

$$2^3, 3^3, 2 \times 3, 2 \times 5, 3 \times 5, 2 \times 7, 2 \times 11, 2 \times 13 \text{ e } 3 \times 7.$$

3.

a) Veja que $3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. Seus divisores são da forma $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, onde $a = 0, 1, 2, 3, 4$, $b = 0, 1, 2$ e $c = 0, 1, 2$. Logo, temos 5 valores para a e 3 para b e c. Portanto, o número de divisores deve ser $5 \cdot 3 \cdot 3 = 45$.

b) Para que um divisor seja par não pode ocorrer $a = 0$. O número de possibilidades para a se reduz a 4. O número de divisores pares é $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$.

c) Para que um divisor seja quadrado perfeito, a, b e c devem ser pares. Logo, só poderão assumir os valores $\{0, 2, 4\}$ para a e $\{0, 2\}$ para b e c. O número de divisores satisfazendo isso é $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

4. (Adaptado da OBMEP $-$ 2014**)**
Como $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$, temos que $n \geq 13$. Por outro lado, sabemos que

$$\begin{aligned} 13! &= 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 13 \cdot (2^2 \cdot 3) \cdot 11 \cdot (2 \cdot 5) \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 3) \cdot \\ &\cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 13 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 5^2 \cdot 3^5 \cdot 2^{10}. \end{aligned}$$

E, portanto,

$$\begin{aligned} \frac{n!}{13!} &= \frac{2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}{13 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 5^2 \cdot 3^5 \cdot 2^{10}} = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 14 \cdot 15 \cdot 16 \\ n! &= 13! \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 = 16! \\ n &= 16. \end{aligned}$$

5. (Adaptado do PROFMAT (acesso) $-$ 2015**)**
Há duas possibilidades:

i) A primeira carta retirada é a dama de ouros. Com isso temos uma opção para a primeira carta e 48 para a segunda. Logo há $1 \times 48 = 48$ maneiras para esse caso.

ii) A primeira carta é de ouros, mas não é a dama. Assim temos 12 opções para a primeira carta e 47 para a segunda. Então há $12 \times 47 = 564$ modos para esse caso.

Portanto a totalidade de maneiras para retirar uma carta de ouros e depois uma carta que não seja uma dama é igual a $48 + 564 = 612$.

6. (Adaptado da OBM $-$ 2010**)**
Seja $s(A)$ a soma dos produtos dos elementos de cada subconjunto de A. Para cada escolha de um produto x sem o fator 10 existe outro produto com o fator 10, que é $10x$, assim podemos dizer que

$$\begin{aligned} s(1, 2, \ldots, 10) &= s(1, 2, \ldots, 9) + 10 \cdot s(1, 2, \ldots, 9) \\ &= 11 \cdot s(1, 2, \ldots, 9). \end{aligned}$$

De forma análoga, temos que $s(1, 2, \ldots, 9) = s(1, 2, \ldots, 8) + 9 \cdot s(1, 2, \ldots, 8) = 10 \cdot s(1, 2, \ldots, 8)$, e assim por diante.
Portanto,

$$\begin{aligned} s(A) &= 11 \cdot s(1, 2, \ldots, 9) \\ &= 11 \cdot 10 \cdot s(1, 2, \ldots, 8) \\ &= \ldots = 11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot s(1) \\ &= 11! \end{aligned}$$

7. (OBMEP $-$ 2014**)**
Como se trata de um número de quatro algarismos, o algarismo 0 não pode ser colocado na unidade de milhar. Temos então 3 possibilidades para posicionar o algarismo 0. Colocado o zero sobram então três posições para se colocar o único algarismo ímpar, que deve pertencer ao conjunto de algarismos $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, e isso nos produz mais $3 \cdot 5 = 15$ possibilidades de escolhas. Colocado o algarismo 0 e o algarismo ímpar, sobram duas posições para se colocarem os dois algarismos pares não nulos e distintos. Fazemos a escolha do primeiro algarismo par não nulo e o colocamos na primeira posição ainda não preenchida do número (há apenas 4 possibilidades de escolhas: 2, 4, 6 e 8). Finalmente, preenchemos a última posição com outro número par não nulo, diferente daquele anteriormente colocado (3 possibilidades). Temos assim $4 \cdot 3 = 12$ possibilidades

de se colocarem os dois algarismos pares não nulos e distintos no número. Pelo Princípio Multiplicativo, o total de possibilidades é $3 \times 15 \times 12 = 540$.

8. (Simulado POTI $-$ 2013 **[*modificado*])**
Considere uma tabela de tamanho $2014 \times C$, na qual cada linha representa um membro e cada coluna um subcomitê. Marcamos a casa da P-ésima linha e Q-ésima coluna se o membro P pertence ao subcomitê Q. Vamos contar o número de marcações M de duas maneiras:

i) Em cada subcomitê existem exatamente 38 membros, logo $M = C \cdot 38$.

ii) Cada membro pertence a exatamente 4 subcomitês, logo $M = 2014 \cdot 4$.

De $C \cdot 38 = M = 2014 \cdot 4$, temos $C = 212$.

9. (Adaptado da OBM)
O algarismo das centenas não pode ser zero. Vamos contar então todos os números que têm um determinado algarismo x, não nulo, pois há mais deles. Há $9 \cdot 9 = 81$ números em que x aparece uma única vez como algarismo das centenas, $8 \cdot 9$ números em que x aparece uma única vez como algarismo das dezenas e também há $8 \cdot 9 = 72$ números em que o x aparece uma única vez como algarismo das unidades. Há 9 números com x na centena e na dezena, exceto na unidade, 9 números com x na centena e na unidade, exceto na dezena e 8 números com x na dezena e na unidade, exceto na centena. Além disso, há um único número com todos os dígitos iguais a x. A quantidade total de números em que figura o algarismo não nulo x é $81 + 72 + 72 + 9 + 9 + 8 + 1 = 252$.

10. (Adaptado da Olimpíada da Rússia)
A quantidade de números elegantes deve ser menor ou igual ao número de soluções da inequação $a^3 + b^2 \leq 10^6$. Note que $0 \leq a \leq 10^2$ e $0 \leq b \leq 10^3$.
O número de soluções é menor do que

$$(10^2 + 1)(10^3 + 1) = 101101 < 5 \cdot 10^5.$$

Logo, a quantidade de números elegantes é menor do que a metade da quantidade de números entre 1 e 1000000. Isto é, existem mais números que não são elegantes.

11. Podemos dividir o tabuleiro em três regiões: A primeira é formada pelas quatro casas nos cantos do tabuleiro; a segunda pelas 24 casas da borda (que não estão nos cantos); e a terceira pelo tabuleiro 6×6 no interior do tabuleiro. Se o primeiro rei for posto na primeira região, temos 60 maneiras de colocar o segundo rei; se ele for posto na segunda, temos 58 maneiras; e se for posto na terceira, temos 55 maneiras. Logo, temos um total de $4 \times 60 + 24 \times 58 + 36 \times 55 = 3612$ modos diferentes de colocar os dois reis.

12. (Canguru $-$ 2009 **[*modificado*])**

Contando sucessivamente as opções de escolhas para cada um dos dígitos, da esquerda para a direita, temos $Z = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$. Se quisermos que o número seja divisível por 9, precisamos que a soma dos seus dígitos seja um múltiplo de nove. Como a soma $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45$ é múltiplo de nove, para seguirmos para outro valor nas mesmas condições, precisamos retirar exatamente o algarismo 9 das opções, ficando com soma $45 - 9 - 36$, valor que atente a propriedade desejada. Assim, temos 8 dígitos possíveis para formar um número de 8 algarismos distintos, gerando um total de 8! valores.

13. (Canguru $-$ 2009 **[*modificado*])**

Vamos separar em casos usando como referência o dígito mais à esquerda.

- Começando com 1, o nono algarismo será o 2; depois temos 1 ou 3; na sequência o 2; novamente, 1 ou 3; e assim por diante até o dígito das unidades ser igual a 2. O que gera, pelo PFC a quantidade de $1 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 = 16$ números diferentes.

- Começando com 3, fica totalmente análogo, e totalizada outros 16 números diferentes.

- Começando com 2, o nono algarismo poderá ser 1 ou 3; na sequência o 2; novamente, 1 ou 3; e assim por diante até o dígito das unidades sendo 1 ou 3. O que gera, usando mais uma vez o princípio multiplicativo, $1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2 = 32$ números diferentes.

Por fim, ficamos com $16 + 16 + 32 = 64$ números nas condições pedidas.

14. (Extraído da AIME)

Em virtude da ordem, a_6 é o menor de todos os elementos e assim $a_6 = 1$. Agora, considere a seleção de 5 dentre os 11 remanescentes, organizando-os em ordem descendente e os outros 6 valores de modo ascendente. Daí, os cinco valores iniciais são a_1 até

a_5, e os restantes são a_7 até a_{12}. Existem $\binom{11}{5} = 462$ maneiras de arrumar esses 12 números de acordo com o que foi solicitado.

15. (AIME II $-$ 2015**)**

Seja M a média desejada. Existem $\binom{2015}{1000}$ subconjuntos de 1000 elementos e $\binom{2015-i}{999}$ têm i como elemento mínimo. Assim, pelo Teorema das Colunas,

$$\begin{aligned}
\binom{2015}{1000} M &= \\
&= 1 \cdot \binom{2014}{999} + 2 \cdot \binom{2013}{999} + \cdots + 1016 \cdot \binom{999}{999} \\
&= \binom{2014}{999} + \binom{2013}{999} + \cdots + \binom{999}{999} + \\
&\quad \binom{2013}{999} + \binom{2012}{999} + \cdots + \binom{999}{999} + \\
&\quad \cdots \\
&\quad + \binom{999}{999} \\
&= \binom{2015}{1000} + \binom{2014}{1000} + \cdots + \binom{1000}{1000} \\
&= \binom{2016}{1001}.
\end{aligned}$$

Aplicando a definição de coeficiente binomial, e a identidade $n! = n \cdot (n-1)!$, deduziremos que

$$M = \frac{2016}{1001} = \frac{288}{143}$$

e a respostas é 431.

16. Considere o número abc. Vamos separar o problema em 3 casos.

- $c = 0$: a pode assumir 9 valores e b somente 8, pois devem ser distintos;
- $b = 0$: c pode assumir 4 valores, pois é par, e assim a poderá assumir 8 valores;
- $b, c \neq 0$: c pode assumir 4 valores, consequentemente a poderá ter 8 valores e assim b poderá assumir 7 valores.

Logo, ao todo temos $9 \cdot 8 + 4 \cdot 8 + 4 \cdot 8 \cdot 7 = 328$ números.

17. (Adaptado do POTI $-$ 2014**)**
Podemos escrever $x = 101! \cdot A$.
Agora, note que

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Daí, desenvolvemos

$$\begin{aligned}
A = \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + \ldots + \\
+ \left(\frac{1}{98!} - \frac{1}{99!}\right) + \left(\frac{1}{99!} - \frac{1}{100!}\right) = 1 - \frac{1}{100!}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, ficamos com

$$101! - x = 101! - 101! \cdot \left(1 - \frac{1}{100!}\right) = \frac{101!}{100!} = 101.$$

18. (Adaptado da OBM $-$ 2011**)**
Note que, sendo a e b inteiros positivos, $a!$ divide $b!$ se, e somente se, $a \leq b$. Assim, $(2011!)!$ é divisível por $((n!)!)!$ se, e somente se, $(n!)! \leq 2011!$. Como o fatorial é uma função crescente nos inteiros positivos, $(n!)! \leq 2011!$ implica $n! \leq 2011$. Como

$$720 = 6! < 2011 < 7! = 5040,$$

temos que o valor máximo de n é 6.

19. (Extraído da OBM $-$ 2013**)**

Uma solução:
Suponha que, após abrir C caixas, Led ainda não consiga abrir o portal. Isso significa que há pelo menos uma chave que ele não possui. Então, as caixas que ele abriu possuíam pares de chaves capazes de abrir não mais que 9 cadeados. Logo, teremos $C \leq C_{9,2} = 36$. De fato, se ele abrir caixas que possuem todos os pares das chaves de um conjunto de 9 cadeados, ele não conseguirá abrir o portal. Por outro lado, nota-se também que se Led abrir 37 caixas distintas, saberemos que suas chaves não poderão ser um subconjunto de chaves capazes de abrir não mais que 9 cadeados, pois é maior que 36. Então, o mínimo que Led deve abrir é 37.

Outra solução:
Comece se perguntando o por quê de haver 45 cadeados, e perceberá que é a quantidade de duplas possíveis com 10 objetos. Cada objeto está então em 9 caixas. Portanto, se por azar, tirar todas as caixas que não aparece a chave X, teremos encontrado $45 - 9 = 36$ caixas ou 9 chaves, daí, a próxima caixa terá a chave faltante, logo a resposta é 37.

20. (Canguru — 2009 [*modificado*])

Alberto pode formar blocos com as configurações:

- $1 \times 1 \times 2009$, cuja superfície lateral tem

$$2 \times (1 \times 1) + 4 \times (1 \times 2009) = 8038;$$

- $1 \times 7 \times 287$, com superfície lateral de

$$2 \times (1 \times 7) + 2 \times (1 \times 287) + 2 \times (7 \times 287) = 4606;$$

- $7 \times 7 \times 41$, com lateral igual a

$$2 \times (7 \times 7) + 4 \times (7 \times 41) = 1246; \text{ e}$$

- $49 \times 41 \times 1$, com lateral igual a

$$2 \times 49 \times 41 + 2 \times 41 + 2 \times 49 = 4198.$$

Como há 2009 adesivos, só poderá cumprir o desejado se formar o bloco $7 \times 7 \times 41$, e sobrarão

$$2009 - 1246 = 763 \text{ adesivos.}$$

21. (Adaptado da OBMEP — 2014)
Como os números devem terminar em algarismo ímpar e a soma dos algarismos das unidades e das dezenas deve ser igual a 16, os números devem terminar em 79 ou 97 (2 possibilidades). Na casa das dezenas de milhar temos 9 possibilidades, pois os números, tendo cinco algarismos, não podem ter 0 nessa casa. Para a casa das unidades de milhar temos 10 possibilidades (todos os algarismos de 0 a 9). Para determinar o algarismo das centenas, basta determinar o resto na divisão por 5 da soma dos restantes. Por exemplo, considere

$$11\square 79$$

no qual o $\square$ indica um algarismo que está faltando para que a soma dos cinco algarismos seja um múltiplo de 5. A soma dos algarismos restantes deixa resto 3 na divisão por 5 e assim devemos inserir um algarismo que deixe resto 2, ou seja, devemos inserir 2 ou 7. Como cada resto na divisão por 5 aparece exatamente duas vezes dentre os elementos do conjunto $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$, para cada uma das escolhas anteriores, podemos escolher o algarismo das centenas de duas maneiras distintas, a fim de que a soma de todos os algarismos do número seja um múltiplo de 5. Logo, há

$$2 \times 9 \times 10 \times 2 = 360 \text{ possibilidades.}$$

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com