Módulo Divisibilidade

Conjunto e Quantidade de Divisores

6° **ano E.F.**

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

PORTAL DA
MATEMÁTICA
OBMEP

Divisibilidade
Conjunto e Quantidade de Divisores

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine o conjunto dos divisores naturais de:

a) 12.

b) 24.

c) 30.

Exercício 2. Qual a quantidade de divisores de:

a) 60?.

b) 121?.

c) 120?.

Exercício 3. A forma fatorada de um número é $2^3 \cdot 3^2 \cdot 11^2$. Quantos divisores tem este número?

Exercício 4. Uma professora leva para a sala de aula uma caixa com 24 bombons. Ela quer distribuir estes bombons de maneira que cada aluno receba a mesma quantidade de bombons e também que não sobre nem um bombom com ela. Quantas são as possíveis quantidades de alunos em sala para que isso aconteça?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 5. No quadro abaixo, qual dos números tem a maior quantidade de divisores?

20	30	40	50

Exercício 6. Após a fatoração de um número N, calculou-se a sua quantidade de divisores, concluindo-se que N é um quadrado perfeito. Assinale a alternativa que contenha uma possível quantidade de divisores de N.

a) 2.

b) 4.

c) 5.

d) 8.

e) 12.

Exercício 7. Faça a fatoração de 360 e determine seu conjunto de divisores.

Exercício 8. Fatorando 270, obtemos $2 \cdot 3^3 \cdot 5$. Complete o quadro abaixo, no qual as três primeiras colunas indicam os fatores primos e a última coluna o divisor de 270, para mostrar todos os seus divisores.

2^0	3^0	5^0	1
2^0	3^0	5^1	5
2^0	3^1	5^0	3
2^0	3^1	5^1	15
2^0	3^2	5^0	9
2^0	3^2	5^1	45
2^0	3^3	5^0	27
	3^3	5^1	135
2^1	3^0	5^0	
2^1	3^0		10
2^1		5^0	6
2^1	3^1	5^1	
	3^2		18
2^1	3^2		90
2^1			54
2^1	3^3		270

Exercício 9. Determine a quantidade de divisores de $12^5 \cdot 45^7$.

Exercício 10. Um determinado número A tem 48 divisores e apenas 3 fatores primos. Se o fator primo a tem expoente 1, em sua forma decomposta, e o fator primo b tem expoente 3, em sua forma decomposta, determine o expoente do fator primo c.

Exercício 11. Se $N = 2^3 \cdot 3^a \cdot 7^2$, determine o valor de a, sabendo que N possui 48 divisores naturais.

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

Exercício 12. O número $14a$, sendo a um algarismo, possui exatamente 15 divisores. Determine o valor de a.

Exercício 13. Complete os parênteses na fatoração abaixo e determine a quantidade de divisores de N.

N	2
(___)	2
(___)	2
(___)	2
75	(___)
(___)	(___)
(___)	(___)
1	

Exercício 14. Quantos números entre 100 e 110 têm exatamente 4 divisores naturais?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 15. Dentre os números de 2 algarismos, quais possuem a maior quantidade de divisores?

Exercício 16. Se o número 741^n tem aba divisores, sendo a e b algarismos. Calcule b^a.

Exercício 17. Determine quantos números menores que 100 possuem exatamente 8 divisores.

Exercício 18. Determine a quantidade de divisores do número $2^{16} - 1$.

Exercício 19. Um concurso oferece um prêmio para cada pergunta respondida corretamente. São 10 perguntas, sendo que, dos 10 prêmios, são 3 bombons iguais, 4 chocolates iguais e 3 pirulitos iguais. De quantas maneiras diferentes um candidato deste concurso poderá ser premiado?

a) 50.

b) 80.

c) 120.

d) 132.

e) 180.

Exercício 20. Sobre uma mesa existem 3 pilhas de moedas: a primeira pilha possui 5 moedas amarelas com o número 2 em suas faces; a segunda possui 3 moedas verdes com o número 3; e a última pilha possui 2 moedas azuis com o número 7. Uma pessoa deve escolher qualquer quantidade de moedas da mesa e multiplicar os números de suas faces. Quantos números diferentes podem ser formados?

a) 71.

b) 70.

c) 10.

d) 120.

e) 30.

Respostas e Soluções.

1.

a) $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

b) $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$.

c) $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.

2.

a) como $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, sua quantidade de divisores é $(2+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 12$.

b) como $121 = 11^2$, sua quantidade de divisores é $(2+1) = 3$.

c) como $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, sua quantidade de divisores é $(3+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 16$.

3. $(3+1) \cdot (2+1) \cdot (2+1) = 36$.

4. A quantidade de alunos deve ser um número divisor de 24, ou seja, $(3+1) \cdot (1+1) = 8$.

5. Temos que:

i. como $20 = 2^2 \cdot 5$, então são $(2+1) \cdot (1+1) = 6$ divisores;

ii. como $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, então são $(1+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 8$ divisores;

iii. como $40 = 2^3 \cdot 5$, então são $(3+1) \cdot (1+1) = 8$ divisores;

iv. como $50 = 2 \cdot 5^2$, então são $(1+1) \cdot (2+1) = 6$ divisores.

Portanto, os números do quadro que possuem mais divisores são 30 e 40.

6. Um quadrado perfeito apresenta quantidade ímpar de divisores. Resposta C.

7.

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \\ \hline & \boxed{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5} \end{array}$$

Como $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, então os divisores de 360 são do tipo $2^n \cdot 3^m \cdot 5^p$, sendo $n \in \{0, 1, 2, 3\}$, $m \in \{0, 1, 2\}$ e $p \in \{0, 1\}$.

Por fim, vamos usar uma tabela com todas as combinações de n, m, p e os respectivos valores dos divisores de 360.

n	m	p	divisor
0	0	0	1
0	0	1	5
0	1	0	3
0	1	1	15
0	2	0	9
0	2	1	45
1	0	0	2
1	0	1	10
1	1	0	6
1	1	1	30
1	2	0	18
1	2	1	90
2	0	0	4
2	0	1	20
2	1	0	12
2	1	1	60
2	2	0	36
2	2	1	180
3	0	0	8
3	0	1	40
3	1	0	24
3	1	1	120
3	2	0	72
3	2	1	360

8.

2^0	3^0	5^0	1
2^0	3^0	5^1	5
2^0	3^1	5^0	3
2^0	3^1	5^1	15
2^0	3^2	5^0	9
2^0	3^2	5^1	45
2^0	3^3	5^0	27
2^0	3^3	5^1	135
2^1	3^0	5^0	2
2^1	3^0	5^1	10
2^1	3^1	5^0	6
2^1	3^1	5^1	30
2^1	3^2	5^0	18
2^1	3^2	5^1	90
2^1	3^3	5^0	54
2^1	3^3	5^1	270

9. (Extraído da Vídeo Aula) Temos que:

$$\begin{aligned} 12^5 \cdot 45^7 &= \\ (3 \cdot 2^2)^5 \cdot (3^2 \cdot 5)^7 &= \\ 3^5 \cdot 2^{10} \cdot 3^{14} \cdot 5^7 &= \\ 2^{10} \cdot 3^{19} \cdot 5^7. \end{aligned}$$

Como os expoentes dos fatores primos são 10, 19 e 7, a quantidade de divisores é $(10+1)\cdot(19+1)\cdot(7+1) = 1760$.

10. Como dois dos três divisores são 1 e 3 e $(1+1)\cdot(3+1) = 8$, para que a quantidade de divisores seja 48, o expoente do fator c deve ser 5, pois $(1+1)\cdot(3+1)\cdot(5+1) = 48$.

11. Temos $(3+1)\cdot(a+1)\cdot(2+1) = 48$, segue que $a = 3$. Resposta C.

12. Se a quantidade de divisores é ímpar, então este número deve ser um quadrado perfeito. Como entre 140 e 149 existe apenas 144 que é quadrado perfeito, temos $a = 4$. Podemos verificar que $144 = 2^4 \cdot 3^2$, que realmente possui 15 divisores.

13.

N	2
600	2
300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	
	$\boxed{2^3 \cdot 3 \cdot 5^2}$

Como $N = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$, então a quantidade de divisores de N é $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$.

14. Para que um número tenha exatamente 4 divisores, ele deve ser resultado do produto de dois números primos, já que 1 e o próprio número já são divisores. Temos então que $2 \cdot 53 = 106$ é o único número entre 100 e 110 com exatamente 4 divisores.

15. Vamos analisar o número de 2 algarismos que possui a maior quantidade de fatores primos diferentes. Como $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 > 99$, então este número possui no máximo 3 fatores primos diferentes. Vamos estudar as únicas possibilidades com três fatores primos que nos permitirão acrescentar uma quantidade maior de novos primos, ou seja, $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, o qual podemos multiplicá-lo por 2 ou por 3, onde obteríamos 60 e 90, respectivamente, cada um deles com $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ divisores; e $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$, donde podemos multiplicá-lo por 2, obtendo 84, que possui 12 divisores. Estudemos agora os números de dois dígitos com dois fatores primos. Para que um número possua 12 divisores, ele deve ser da forma $p^x q^y$ com $\{x, y\} \in \{\{5,1\},\{3,2\}\}$. Essas possibilidades produzem apenas $2^5 \cdot 3^1 = 96$ e $2^3 \cdot 3^2 = 72$. Como $2^{11} > 100$, não existe exemplo com apenas um fator primo e com pelo menos 12 divisores. Portanto, os números de 2 algarismos com a maior quantidade de divisores são 60, 72, 84, 90 e 96.

16. (Extraído da Vídeo Aula) Temos que $741 = 3 \cdot 13 \cdot 19$. Como são 3 divisores primos, o número total de divisores é $(n+1)\cdot(n+1)\cdot(n+1)$. Vamos analisar a tabela para diversos valores de n:

Valor de n	número de divisores
1	8
2	27
3	64
4	125
5	216
6	343
7	512
8	729
9	1000

Vemos que a partir de $n = 9$, temos uma quantidade de divisores com mais de 3 algarismos, sendo que a quantidade de algarismos deve ser da forma *aba*. O único valor que atende o fato do algarismo da unidade ser igual ao algarismo da centena no número que representa a quantidade de divisores é 343, para $n = 6$. Assim, $b^a = 4^3 = 64$.

17. Não pode haver número cuja fatoração seja formada por apenas um primo, pois seriam maiores que 100, já que o menor deles é $2^7 = 128$. Então, para que um número possua exatamente 8 divisores, sua forma decomposta deve ter um primo com expoente 1 e outro primo com expoente 3; ou três primos, todos com expoente 1. Vamos usar uma tabela para listar todas as possibilidades.

Número fatorado	Resultado
$2 \cdot 3 \cdot 5$	30
$2 \cdot 3 \cdot 7$	42
$2 \cdot 3 \cdot 11$	66
$2 \cdot 3 \cdot 13$	78
$2 \cdot 5 \cdot 7$	70
$2^3 \cdot 3$	24
$2^3 \cdot 5$	40
$2^3 \cdot 7$	56
$2^3 \cdot 11$	88
$2 \cdot 3^3$	54

Temos, portanto, 10 números menores que 100 que possuem exatamente 8 divisores.

18. Temos que:

$$\begin{aligned} 2^{16} - 1 &= \\ (2^8 + 1) \cdot (2^8 - 1) &= \\ (2^8 + 1) \cdot (2^4 + 1) \cdot (2^4 - 1) &= \\ (2^8 + 1) \cdot (2^4 + 1) \cdot (2^2 + 1) \cdot (2^2 - 1) &= \\ 257 \cdot 17 \cdot 5 \cdot 3. & \end{aligned}$$

Como o produto é composto por 4 números primos, $2^{16} - 1$ possui $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ divisores.

19. Resolver este problema é o mesmo que calcular a quantidade de divisores do número $b^3 \cdot c^4 \cdot p^3$, sendo b, c e p números primos, ou seja, $(3 + 1) \cdot (4 + 1) \cdot (3 + 1) = 80$. Resposta B.

20. Como são 5 com o número 2, 3 com o número 3 e 2 com o número 7, basta calcularmos a quantidade de divisores do número $2^5 \cdot 3^3 \cdot 7^2$, excluindo o 1, ou seja, são $(5 + 1) \cdot (3 + 1) \cdot (2 + 1) - 1 = 71$ divisores. Resposta A.

ELABORADO POR CLEBER ASSIS E TIAGO MIRANDA
PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
CONTATO@CURSOARQUIMEDES.COM