Módulo de Probabilidade Condicional

Lei Binomial da Probabilidade.

2^a série E.M.

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Probabilidade Condicional
Lei Binomial da Probabilidade

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Uma moeda tem probabilidade p_1 de sair cara e p_2 de sair coroa. Ao laçarmos duas vezes essa moeda,

a) qual a probabilidade de termos duas caras?

b) qual a probabilidade de termos uma cara e uma coroa, nessa ordem?

c) qual a probabilidade de termos uma coroa e uma cara, nessa ordem?

d) qual a probabilidade de termos duas coroas?

Exercício 2. Uma moeda tem probabilidade p_1 de sair cara e p_2 de sair coroa. Ao laçarmos três vezes essa moeda,

a) qual a probabilidade de termos três caras?

b) qual a probabilidade de termos duas caras e uma coroa?

c) qual a probabilidade de termos uma cara e duas coroas?

d) qual a probabilidade de termos três coroas?

e) qual a soma das probabilidades dos itens anteriores?

Exercício 3. Quatro moedas honestas são lançadas ao mesmo tempo. Qual é a probabilidade de termos duas caras e duas coroas como resultado desse lançamento?

Exercício 4. Numa prova de exame de Admissão para uma faculdade, há 9 questões de múltipla escolha com 4 respostas, das quais só uma é verdadeira. Se um aluno decidir responder ao acaso, qual é a probabilidade:

a) Acertar em todas as respostas?

b) Acertar em apenas duas respostas?

Exercício 5. Uma moeda não viciada é lançada várias vezes. Qual a probabilidade de obtermos 5 caras antes de obtermos 3 coroas?

Exercício 6. Suponha que um aluno pretenda fazer um teste de múltipla escolha com 10 questões e cinco alternativas por questão respondendo cada uma das questões de forma aleatória. Qual é probabilidade dele acertar no máximo 3 questões?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 7. A prova de português de um concurso público é constituída por 10 questões em forma de teste, com 5 alternativas em cada teste. Um dos pré-requisitos para a aprovação do candidato é que ele acerte pelo menos 30% das questões. Se um candidato "chutar" todas as respostas, qual a probabilidade dele acertar exatamente 30% das questões?

Exercício 8. Em um jogo, Pedro lança uma moeda para decidir quantas casas avançar. Quando sai cara, ele avança uma; quando sai coroa, ele avança duas. O jogo acaba quando Pedro alcança ou ultrapassa a última casa. Faltam três casas para Pedro terminar o jogo. Qual a probabilidade de que ele tire coroa em sua última jogada?

Exercício 9. Suponha que numa linha de produção a probabilidade de se obter uma peça defeituosa é $p = 0,1$. Toma-se uma amostra de 10 peças para serem inspecionadas. Qual a probabilidade de se obter:

a) exatamente uma peça defeituosa?

b) nenhuma peça defeituosa?

c) exatamente duas peças defeituosas?

d) no mínimo duas peças defeituosas?

e) no máximo duas peças defeituosas?

Exercício 10. Considere os seguintes resultados relativamente ao lançamento de uma moeda honesta:

A. Ocorrência de duas caras em dois lançamentos.

B. Ocorrência de três caras e uma coroa em quatro lançamentos.

C. Ocorrência de cinco caras e três coroas em oito lançamentos.

Agora, ordene-os do mair provável para o menos provável.

Exercício 11. Sendo o experimento aleatório o nascimento de 4 filhos de um casal, qual a probabilidade que representa o evento nascimento de dois meninos e duas meninas do casal?

Exercício 12. Por uma série de razões, a probabilidade de um casal ter um filho do sexo feminino é 25%. Qual a probabilidade de esse casal ter dois filhos de sexos diferentes?

Exercício 13. Jogamos uma moeda honesta 9 vezes, qual a probabilidade de obtermos exatamente 4 caras?

Exercício 14. Quatro dados não-viciados são jogados. Qual é a probabilidade que o produto dos números que aparecem nas faces superiores dos dados seja 36?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 15. Dois atiradores acertam o alvo uma vez a cada três disparos. Se os dois atiradores disparam simultaneamente, então a probabilidade do alvo ser atingido pelo menos uma vez é igual a

a) $\frac{2}{9}$. b) $\frac{1}{3}$. c) $\frac{4}{9}$. d) $\frac{5}{9}$. e) $\frac{2}{3}$.

Exercício 16. Motores de avião funcionam independentemente e cada motor tem a mesma probabilidade $p > 0$ de falhar durante um voo. Um avião voa com segurança se pelo menos a metade de seus motores funciona. Para quais valores de p é mais seguro viajar em um avião com 2 motores do que em um avião com 4 motores?

Exercício 17. **(Problema da caixa de fosforo de Banach)** Suponha que um homem ande sempre com duas caixas de fósforos com n palitos cada uma. Suponha também que cada vez que ele necessite usar um fósforo ele pegue de forma aleatória em qualquer uma das caixas. Como ele é uma pessoa distraída quando ele pega o último palito da caixa de fósforos ele não se lembra de jogá-la fora. Qual a probabilidade de que quando ele perceba que uma das caixas está vazia a outra contenha exatamente k fósforos?

Respostas e Soluções.

1.

a) Duas caras têm a probabilidade $p_1 \cdot p_1 = (p_1)^2$.

b) Uma cara e uma coroa têm a probabilidade $p_1 \cdot p_2$.

c) Uma coroa e uma cara têm a probabilidade $p_2 \cdot p_1$.

d) Duas coroas têm a probabilidade de $p_2 \cdot p_2 = (p_2)^2$.

2. Sejam K e C as representações dos resultados Cara e Coroa, nessa ordem.

a) Três caras têm a probabilidade de $p_1 \cdot p_1 \cdot p_1 = (p_1)^3$.

b) Com duas caras e uma coroa, podemos ter as ordens KKC, KCK e CKK, e a probabilidade é $3 \cdot p_1 \cdot p_1 \cdot p_2$.

c) Com duas coroas e uma cara, podemos ter as ordens CCK, CKC, KCC, cuja probabilidade é $3 \cdot p_2 \cdot p_2 \cdot p_1$.

d) Três coroas têm a probabilidade de $p_2 \cdot p_2 \cdot p_2 = (p_2)^3$.

e) A soma dos últimos itens fica

$$p_1^3 + 3p_1^2p_2 + 3p_1p_2^2 + p_2^3 = (p_1 + p_2)^3.$$

3. Como existem $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ possibilidades para as posições das caras, a probabilidade é igual a

$$6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

4. Para acertar uma questão ao acaso a probabilidade será igual a $\frac{1}{4}$, para acertar as noves, teremos

$$P = \left(\frac{1}{4}\right)^9 = \frac{1}{262144}.$$

Para acertar em apenas duas, temos

$$P(\text{duas erradas}) = \left(\frac{1}{4}\right)^2.$$

Para errar as outras 7 ficamos com

$$P(\text{errar sete}) = \left(\frac{3}{4}\right)^7.$$

A sequência de acertos e erros pode ser formada começando pelos acertos com a quantidade de (entre 9 escolher 2) $C_2^9 = 36$ (logicamente, as demais serão erradas), o que dá uma probabilidade de $P = 36 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^7$.

5. Podemos ter 5 caras seguidas cuja probabilidade é

$$\binom{5}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^5.$$

Podemos ter 4 caras com alguma coroa intercalada e depois uma cara, que ocorre com probabilidade

$$\binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \frac{1}{2} = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \frac{1}{2}.$$

Podemos ter 4 caras com duas coroas intercaladas e depois uma cara, que ocorre com probabilidade

$$\binom{6}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = 15 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}.$$

Agora, basta somar todos os resultados, ficando com

$$\frac{1}{32} + \frac{5}{64} + \frac{15}{128} =$$
$$\frac{4}{128} + \frac{10}{128} + \frac{15}{128} = \frac{29}{128}.$$

6. A probabilidade de acerto (p_A) em cada item é de $1/5$ e de erro (p_E) é de $4/5$. Ele pode acertar zero, uma duas ou três questões, e as parcelas da expansão binomial $(p_A + p_E)^{10}$ que interessam são:

- $\binom{10}{0} \cdot (p_E)^{10} \cdot (p_A)^0 = 1 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^0$;
- $\binom{10}{1} \cdot (p_E)^9 \cdot (p_A)^1 = 10 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^1$;
- $\binom{10}{2} \cdot (p_E)^8 \cdot (p_A)^2 = 45 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2$; e
- $\binom{10}{3} \cdot (p_E)^7 \cdot (p_A)^3 = 120 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3$.

Logo, a probabilidade de que o aluno acerte no máximo 3 questões é

$$\frac{4^{10}}{5^{10}} + \frac{10 \cdot 4^9}{5^{10}} + \frac{45 \cdot 4^8}{5^{10}} + \frac{120 \cdot 4^7}{5^{10}} \cong 0,879.$$

7. (Adaptado da IFGO $-$ 2014)
A probabilidade de acerto (p_A) em cada item é de $1/5$ e de erro (p_E) é de $4/5$. Ele pode acertar zero, uma, duas ou três questões, e a parcela da expansão binomial $(p_A + p_E)^{10}$ que interessa é $\binom{10}{3} \cdot (p_A)^3 \cdot (p_E)^{10} = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{10}$

8. (Adaptado da OBMEP)
Pedro pode terminar o jogo de cinco maneiras, a saber:

i) (cara, cara, cara) cuja probabilidade será igual a

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8};$$

ii) (cara, cara, coroa) cuja probabilidade será igual a

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8};$$

iii) (cara, coroa) cuja probabilidade será igual a

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4};$$

iv) (coroa, cara) cuja probabilidade será igual a

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4};\text{ e}$$

v) (coroa, coroa) cuja probabilidade será igual a

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

Apenas os itens ii, iii e v terminam em **coroa**. Como as alternativas são mutuamente exclusivas ("regra do ou"), devemos somá-las para obter a probabilidade desejada que é igual

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$$

9. (Adaptado do Portal Action)
Seja p_D a probabilidade de retirada de uma peça defeituosa e p_B a probabilidade de retirada de uma peça boa.

a) $\binom{10}{1}\cdot(p_D)^1\cdot(p_B)^9=10\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^1\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^9=0,3874.$

b) $\binom{10}{0}\cdot(p_D)^0\cdot(p_B)^9=10\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^0\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{10}=0,3486.$

c) $\binom{10}{2}\cdot(p_D)^2\cdot(p_B)^8=45\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^8=0,1937.$

d) $1-0,3874-0,3486=0,264.$

e) $0,3874+0,3486+0,1937=0,9297.$

10. (Adaptado do vestibular do ITA SP − 2013)

- A probabilidade será igual a

$$\binom{2}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{4}=\frac{8}{32}.$$

- A probabilidade será igual a

$$\binom{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1=4\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{4}=\frac{8}{32}.$$

- A probabilidade será igual a

$$\binom{8}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=56\cdot\frac{1}{256}=\frac{56}{256}=\frac{7}{32}.$$

Sendo assim, $A=B>C$.

11. Sejam H e M os resultados de nascimento de meninos e meninas. Nesse caso, $P(H)=P(M)=\frac{1}{2}$, como queremos dois de cada gênero, basta calcularmos

$$\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}.$$

12. Sejam H e M os resultados de nascimento de meninos e meninas. Nesse caso, como $P(M)=\frac{1}{4}$, então $P(H)=\frac{3}{4}$. Agora, queremos dois de cada gênero, basta calcularmos

$$\binom{2}{1}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}.$$

13. (Extraído do vestibular do ITA − 2012)
A probabilidade será igual a

$$\binom{9}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\binom{9}{4}\cdot\frac{1}{2^9}.$$

14. (Extraído da Olimpíada da Holanda)
Seis dados geram 6^4 resultados dispostos e temos quatro fatores para o produto ser igual a 36, a saber:

i) $\{1,1,6,6\}$, obtido de $P^4_{2,2}=\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}=6$ formas;

ii) $\{1,2,3,6\}$, obtido de $P^4=4!=24$ formas;

iii) $\{1,3,3,4\}$, obtido de $P^4_{2,2}=\dfrac{4!}{2!}=12$ formas; e

iv) $\{2,2,3,3\}$, obtido de $P^4_{2,2}=\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}=6$ formas.

Por fim, a probabilidade pedida será igual a

$$\frac{6+24+12+6}{6^4}=\frac{1}{27}.$$

15. (Extraído do vestibular do ITA − 2012)
Sendo A_1 e A_2 os atiradores com $P(A_1) = P(A_2) = \dfrac{1}{3}$, queremos, na expansão binomial as parcelas $\binom{2}{1} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^1 + \binom{2}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^0 = \dfrac{5}{9}$. O que está na **letra D**.

16. O avião de 2 motores cairá se os 2 motores falharem, o que tem probabilidade p^2. O avião de 4 motores cairá apenas se 3 ou 4 motores falharem, o que tem probabilidade $4p^3(1-p) + p^4$. Será mais seguro viajar no avião de 2 motores quando $p^2 < 4p^3(1-p) + p^4$, isto é, $3p^2 - 4p + 1 < 0$. O conjunto solução da inequação quadrática anterior é $\dfrac{1}{3} < p < 1$.

17. Determinemos inicialmente a probabilidade de, quando o matemático constata que a caixa 1 está vazia, a caixa de número 2 contenha exatamente k palitos. Considerando como prova a retirada de um palito e como sucesso a retirada de um palito da caixa número 1, isso ocorre se e somente se o sucesso de ordem $n+1$ ocorre na prova de ordem $n+1+n-k$. Parra isso, deve haver n sucessos nas $2n-k$ primeiras provas e deve haver sucesso na prova seguinte. A probabilidade é

$$\binom{2n}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2n-k-n} \cdot \frac{1}{2} =$$
$$= \binom{2n-k}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k} \cdot \frac{1}{2}.$$

Portanto, a probabilidade de que quando o matemático constata de que a caixa de número 2 está vazia e a caixa de número 1 contém exatamente k palitos também é igual a $\binom{2n-k}{n} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n-k} \cdot \dfrac{1}{2}$. Por fim, a probabilidade que procuramos é $\binom{2n-k}{n} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n-k}$.

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com