

Módulo: Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal

Somas de elementos em Linhas, Colunas e Diagonais do Triângulo de Pascal

2º ano do E.M.



1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine os valores das somas:

$$\text{a) } \sum_{i=0}^2 \binom{4+i}{i} \quad \text{b) } \sum_{i=0}^3 \binom{5+i}{i} \quad \text{c) } \sum_{i=0}^2 \binom{6+i}{i}$$

$$\text{d) } \sum_{i=0}^5 \binom{8+i}{i}$$

Exercício 2. Calcule a maior potência de 2 que divide S , em cada um dos casos abaixo:

$$\text{(a) } S = \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i};$$

$$\text{(b) } S = \sum_{i=0}^9 \binom{9}{i};$$

$$\text{(c) } S = \sum_{i=0}^{16} \binom{16}{i};$$

$$\text{(d) } S = \sum_{i=0}^{21} \binom{21}{i}.$$

Exercício 3. Encontre o valor das somas abaixo:

$$\text{(a) } S = \sum_{i=0}^3 \binom{4+i}{4};$$

$$\text{(b) } S = \sum_{i=0}^4 \binom{5+i}{5};$$

$$\text{(c) } S = \sum_{i=0}^5 \binom{6+i}{6}.$$

Exercício 4. O símbolo $C_{n,p}$ é definido por $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ para $n \geq p$, com $0! = 1$. Estes números $C_{n,p}$ são inteiros e aparecem como coeficientes no desenvolvimento de $(a+b)^n$.

a) Mostre que $C_{n,p-1} + C_{n,p} = C_{n+1,p}$.

b) Seja $S = C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \dots + C_{n,n}$. Calcule $\log_2 S$.

Exercício 5. Se n é par, dentre os números binomiais abaixo

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n},$$

qual deles possui maior valor?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. Encontre o valor da soma

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2.$$

Exercício 7. Se A possui 64 subconjuntos, qual o número de elementos de A ?

Exercício 8. Calcule $\sum_{k=0}^n (k+1) \binom{n}{k}$.

Dica: Use que $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}$.

Exercício 9. Calcule o valor da soma

$$\sum_{k=0}^n k \cdot 3^k \cdot \binom{n}{k}.$$

Exercício 10. Calcule o valor das somas:

$$\text{(a) } \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots$$

$$\text{(b) } \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots$$

Exercício 11. Calcule o valor das somas:

$$\text{(a) } \binom{n}{1} + 3\binom{n}{3} + 5\binom{n}{5} + \dots$$

$$\text{(b) } 2\binom{n}{2} + 4\binom{n}{4} + 6\binom{n}{6} + \dots$$

Exercício 12. Calcule o valor da soma:

$$\binom{n}{0} - 2\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} - \dots + (-1)^n (n+1) \binom{n}{n}.$$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 13. Verifique a identidade de Euler:

$$\sum_{i=0}^p \binom{m}{i} \binom{n}{p-i} = \binom{m+n}{p}.$$

Exercício 14. Mostre, usando um argumento combinatorio, que:¹

$$1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + \dots + n \cdot \binom{n}{n} = n2^{n-1}$$

Exercício 15. Para os inteiros positivos k e n , com $k \leq n$, sabe-se que $\frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$. Então, o valor de

$$\binom{n}{0} + \frac{1}{2} \binom{n}{1} + \frac{1}{3} \binom{n}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} \binom{n}{n}$$

é igual a:

$$\text{a) } 2^n + 1 \quad \text{b) } 2^{n+1} + 1 \quad \text{c) } \frac{2^{n+1} + 1}{n}$$

$$\text{d) } \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} \quad \text{e) } \frac{2^n - 1}{n}.$$

¹Veja que tal identidade segue imediatamente do exercício 11.

Exercício 16. Considere o conjunto $S = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a + b = 18\}$. A soma de todos os números da forma $\frac{18!}{a!b!}, \forall (a, b) \in S$, é:

- a) 8^6 b) $9!$ c) 9^6 d) 12^6 e) $12!$.

Exercício 17. Encontre uma fórmula fechada para a soma

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2.$$

Exercício 18. Mostre que:

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}.$$

Exercício 19. Seja n um inteiro não negativo. Mostre que:

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}^2 = n \binom{2n-1}{n-1}$$

Exercício 20. Calcule o valor da soma

$$S = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3.$$

Pelo exercício 6, $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Portanto

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i^3 &= 6 \binom{n+4}{4} - n(n+1)(2n+1) - \\ &\quad - \frac{11n(n+1)}{2} - 6(n+1) \\ &= \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2. \end{aligned}$$

Observação: Podemos repetir a estratégia anterior para calcular $S_k = \sum_{i=0}^n n^k$. Note que $k! \binom{n}{k}$ é um polinômio mônico de grau k na variável n . Consequentemente, podemos aplicar o Teorema das Colunas na soma $\sum k! \binom{n}{k}$ e escrever S_k em função das somas S_i , com $i < k$, e do binomial $\binom{n+k+1}{k+1}$.

Exercício 21. Calcule o valor da soma:

$$S = 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 2^2 + 8 \cdot 3^2 + \dots + (3n-1) \cdot n^2.$$

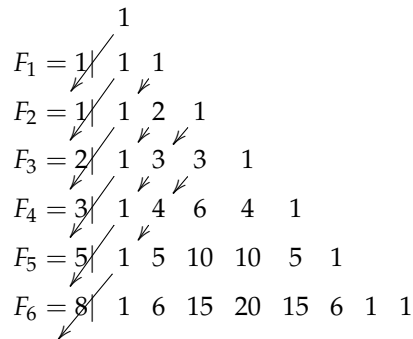
Exercício 22. Calcule o valor da soma

$$S = 50 \cdot 51 + 51 \cdot 52 + \dots + 100 \cdot 101.$$

Exercício 23. Calcule o valor da soma

$$S = \sum_{k=1}^n k(2k+1).$$

Exercício 24. O número de Fibonacci F_n é definido como a soma dos elementos da n -ésima diagonal inversa do Triângulo de Pascal, como ilustrado no diagrama abaixo:



Prove que $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

Exercício 25. Seja n um inteiro ímpar maior que 1. Prove que a sequência

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{\frac{n-1}{2}}$$

contém um número ímpar de números ímpares.

Exercício 26. Calcule o valor da soma

$$S = \binom{n}{0} \binom{n}{2} + \binom{n}{1} \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-2} \binom{n}{n}.$$

Exercício 27. (Extraído da Putnam 1962)

Mostre que:

$$\sum_{r=1}^n r^2 \binom{n}{r} = n(n+1)2^{n-2}.$$

Exercício 28. Calcule o valor da soma

$$S = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} 7^k.$$

Respostas e Soluções.

1. Pelo Teorema das Diagonais, temos:

$$\text{a) } \binom{7}{2} = 21 \quad \text{b) } \binom{9}{3} = 84 \quad \text{c) } \binom{9}{2} = 36$$

$$\text{d) } \binom{14}{5} = 2002$$

2.

(a) Pelo Teorema das Linhas, o valor da soma é dado por 2^2 . Portanto o expoente da maior potência de 2 que divide S é 2.

(b) Pelo Teorema das Linhas, o valor da soma é dado por 2^9 . Portanto o expoente da maior potência de 2 que divide S é 9.

(c) Pelo Teorema das Linhas, o valor da soma é dado por 2^{16} . Portanto o expoente da maior potência de 2 que divide S é 16.

(d) Pelo Teorema das Linhas, o valor da soma é dado por 2^{21} . Portanto o expoente da maior potência de 2 que divide S é 21.

3.

(a) Pelo Teorema das Colunas, o valor da soma é dado por $\binom{4+3+1}{4+1} = 56$.

(b) Pelo Teorema das Colunas, o valor da soma é dado por $\binom{5+4+1}{5+1} = 210$.

(c) Pelo Teorema das Colunas, o valor da soma é dado por $\binom{6+5+1}{6+1} = 792$.

4. (Extraído do Vestibular da UNICAMP)

a)

$$\begin{aligned} C_{n,p-1} + C_{n,p} &= \frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)!} + \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{p!(n-p+1)!} \left(\frac{p}{n+1} + \frac{n-p+1}{n+1} \right) \\ &= \frac{(n+1)!}{p!(n-p+1)!} \\ &= C_{n+1,p}. \end{aligned}$$

b) Pelo teorema das linhas, $S = 2^n$. Portanto, $\log_2 S = n$.

5. Como $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, segue que

$$\begin{aligned} \max \left\{ \binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n} \right\} &= \\ \max \left\{ \binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n/2} \right\}. \end{aligned}$$

Basta mostrarmos agora que nessa última lista os números estão dispostos em ordem crescente. Comparemos o quociente de dois termos consecutivos:

$$\begin{aligned} q &= \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(k-1)!(n-k+1)!}{n!} \\ &= \frac{n-k+1}{k}. \\ &= \frac{n+1}{k} - 1. \end{aligned}$$

Como $k \leq n/2$, segue que $\frac{n+1}{k} > 2$ e assim $q > 1$. Isso mostra que a lista de binomiais é crescente e o seu valor máximo é $\binom{n}{n/2}$.

6. Note que $2\binom{n}{2} = n^2 - n$ e assim, pelo Teorema das Colunas,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n k^2 &= \sum_{k=1}^n \left(2\binom{k}{2} + k \right) \\ &= 2 \left(\sum_{k=1}^n \binom{k}{2} \right) + \sum_{k=1}^n k \\ &= 2 \left(\binom{n+1}{3} \right) + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

7. Se um conjunto possui n elementos, para determinar a sua quantidade de subconjuntos, podemos contar para cada i , quantos subconjuntos possuem i elementos e posteriormente somar todos os valores encontrados. Como existem $\binom{n}{i}$ subconjuntos de i elementos, pelo Teorema das Linhas, o número de subconjuntos é

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Como $2^n = 64 = 2^6$, segue que A possui 6 elementos.

8. Usando a dica dada e o Teorema das Linhas, temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (k+1) \binom{n}{k} &= \left(\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \right) + \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n k \cdot \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \right) + 2^n \\ &= \left(\sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} \right) + 2^n \\ &= n \cdot 2^{n-1} + 2^n \\ &= 2^{n-1}(n+2). \end{aligned}$$

9. Usaremos novamente a dica do problema anterior:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k \cdot 3^k \cdot \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^n k \cdot 3^k \cdot \binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n k \cdot 3^k \cdot \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \\ &= 3n \left(\sum_{k=1}^n 3^k \binom{n-1}{k-1} \right) \\ &= 3n(3+1)^{n-1} \\ &= 3n \cdot 4^{n-1} \end{aligned}$$

10.

(a) Note que

$$\begin{aligned} (1+1)^n + (1-1)^n &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1 + (-1)^i) \\ &= 2 \sum_{0 \leq 2j \leq n} \binom{n}{2j} \end{aligned}$$

Portanto

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \frac{2^n + 0^n}{2} = 2^{n-1}.$$

(b) Pelo Teorema das Linhas, a soma dos termos de índice par e de índice ímpar da n -ésima linha do Triângulo de Pascal é 2^n . Pelo item anterior, a soma dos termos de ordem par é $2^{n-1} = 2^n/2$. Portanto, a soma dos termos de ordem ímpar é também 2^{n-1} .

11.

(a) Pelo exercício anterior, temos

$$\begin{aligned} \binom{n}{1} + 3 \binom{n}{3} + 5 \binom{n}{5} + \dots &= \\ \sum_{1 \leq 2j+1 \leq n} (2j+1) \binom{n}{2j+1} &= \\ \sum_{1 \leq 2j+1 \leq n} (2j+1) \cdot \frac{n}{2j+1} \binom{n-1}{2j} &= \\ n \cdot \sum_{1 \leq 2j+1 \leq n} \binom{n-1}{2j} &= \\ n \cdot 2^{n-2}. & \end{aligned}$$

(b) Do mesmo modo, temos

$$\begin{aligned} 2 \binom{n}{2} + 4 \binom{n}{4} + 6 \binom{n}{6} + \dots &= \\ \sum_{0 \leq 2j \leq n} (2j) \binom{n}{2j} &= \\ \sum_{0 \leq 2j \leq n} (2j) \cdot \frac{n}{2j} \binom{n-1}{2j-1} &= \\ n \cdot \sum_{0 \leq 2j \leq n} \binom{n-1}{2j} &= \\ n \cdot 2^{n-2}. & \end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} - 2 \binom{n}{1} + 3 \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n (n+1) \binom{n}{n} &= \\ \sum_k (-1)^k (k+1) \binom{n}{k} &= \\ \sum_k (-1)^k k \binom{n}{k} + \sum_k (-1)^k \binom{n}{k} &= \\ \sum_{0 \leq 2j \leq n} (2j) \binom{n}{2j} - \sum_{0 \leq 2j+1 \leq n} (2j+1) \binom{n}{2j+1} + (1-1)^n &= \\ \sum_{0 \leq 2j \leq n} (2j) \binom{n}{2j} - \sum_{0 \leq 2j+1 \leq n} (2j+1) \binom{n}{2j+1} & \end{aligned}$$

Pelo exercício anterior, a diferença entre os dois últimos somatórios é zero.

13. Iremos mostrar a identidade através de uma contagem dupla. Considere um grupo composto por $m+n$ pessoas, m das quais são mulheres e n são homens. O número de maneiras de escolhermos um grupo de p pessoas dentre as $m+n$ é claramente $\binom{m+n}{p}$. Outra maneira de contarmos isso, seria começar escolhendo i mulheres, de $\binom{m}{i}$ maneiras, e em seguida complementarmos o grupo

com $p - i$ homens, que pode ser feito de $\binom{n}{p-i}$ maneiras. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o total de escolhas com exatamente i mulheres é $\binom{m}{i} \binom{n}{p-i}$. Como i pode variar no conjunto $\{0, 1, \dots, p\}$, o total de escolhas é $\sum_{i=0}^p \binom{m}{i} \binom{n}{p-i}$. Sabendo que as duas contagens que fizemos produzem resultados iguais, segue a identidade.

14. Queremos escolher algum subconjunto não vazio de um conjunto contendo n crianças para um passeio e, além disso, uma das escolhidas deverá receber um chocolate. Existem $\binom{n}{i}$ subconjuntos com i elementos e para cada uma dessas escolhas, temos i possibilidades para dar o chocolate. Pelo Princípio Multiplicativo, existem $i \cdot \binom{n}{i}$ tais conjuntos. Como i pode variar no conjunto $\{0, 1, \dots, n\}$, temos ao todo

$$1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + \dots + n \cdot \binom{n}{n}$$

possíveis escolhas.

Outra contagem possível seria primeiro escolhermos a criança que ganhará o chocolate e que certamente fará o passeio. Isso pode ser feito de n maneiras. Das $n - 1$ crianças que sobraram, podemos escolher um subconjunto qualquer delas, vazio ou não, para acompanhar a criança escolhida no passeio. Existem 2^{n-1} tais que subconjuntos. Portanto existem $n \cdot 2^{n-1}$ escolhas possíveis.

Comparando os dois valores encontrados, obtemos a identidade do problema.

15. (Extraído do ITA 2014) Pelo Teorema das Linhas, temos

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} + \frac{1}{2} \binom{n}{1} + \frac{1}{3} \binom{n}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} \binom{n}{n} &= \\ \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \binom{n}{i} &= \\ \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{i+1} &= \\ \frac{1}{n+1} \left(2^{n+1} - \binom{n+1}{0} \right) &= \\ \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} & \end{aligned}$$

Resposta letra D.

16. (ITA 2003) Como $\frac{18!}{a!b!} = \binom{18}{a}$ se $a + b = 18$, segue que a soma procurada coincide com a soma dos elementos

da décima-nona linha do Triângulo de Pascal, que vale $2^{18} = 8^6$. Resposta letra A.

17. Pela identidade de Euler², com $m = p = n$, segue que:

$$\begin{aligned} \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 &= \\ \binom{n}{0} \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} \binom{n}{n} &= \\ \binom{n}{0} \binom{n}{n} + \binom{n}{1} \binom{n}{n-1} + \dots + \binom{n}{n} \binom{n}{0} &= \\ \binom{n+n}{n} &= \\ \binom{2n}{n} & \end{aligned}$$

18.

$$\begin{aligned} (n+1) \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k} &= \\ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (n+1)}{k+1} \binom{n}{k} &= \\ \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+1}{k+1} &= \\ 1 - (1-1)^{n+1} &= \\ 1 & \end{aligned}$$

Portanto, dividindo a equação inicial por $n + 1$,

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}.$$

19. Usaremos novamente a relação de Euler contida no

²veja o exercício 13

exercício 13:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}^2 &= \\
 \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \binom{n}{k} &= \\
 \sum_{k=0}^n k \cdot \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \binom{n}{k} &= \\
 \sum_{k=0}^n n \binom{n-1}{k-1} \binom{n}{k} &= \\
 n \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k-1} \binom{n}{k} &= \\
 n \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{n-k} \binom{n}{k} &= \\
 n \binom{2n-1}{n} &= \\
 n \binom{2n-1}{n-1}. &
 \end{aligned}$$

20. Pelo Teorema das Colunas, temos

$$\begin{aligned}
 6 \binom{n+4}{4} &= 6 \left(\sum_{i=0}^n \binom{i+3}{3} \right) \\
 &= \sum_{i=0}^n (i+3)(i+2)(i+1) \\
 &= \sum_{i=0}^n (i^3 + 6i^2 + 11i + 6) \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n i^3 \right) + 6 \left(\sum_{i=1}^n i^2 \right) + 11 \left(\sum_{i=1}^n i \right) + 6(n+1).
 \end{aligned}$$

21. Pelo exercício anterior, temos

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{i=1}^n (3n-1) \cdot n^2 \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n 3n^3 \right) - \left(\sum_{i=1}^n n^2 \right) \\
 &= 3 \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
 \end{aligned}$$

22. Pelo Teorema das Colunas,

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{i=51}^{101} i(i-1) \\
 &= 2 \sum_{i=51}^{101} \frac{i(i-1)}{2} \\
 &= 2 \sum_{i=51}^{101} \binom{i}{2} \\
 &= 2 \sum_{i=2}^{101} \binom{i}{2} - \sum_{i=0}^{50} \binom{i}{2} \\
 &= 2 \binom{102}{3} - 2 \binom{51}{3} \\
 &= 301750.
 \end{aligned}$$

23. Pelo exercício 6, temos

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{k=1}^n k(2k+1) \\
 &= \left(\sum_{k=1}^n 2k^2 \right) + \sum_{k=1}^n k \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}.
 \end{aligned}$$

24. Temos $F_{n+1} = \sum_{0 \leq k \leq (n+1)/2} \binom{n-k+1}{k}$ e $F_n = \sum_{0 \leq k \leq n/2} \binom{n-k}{k}$. Portanto, pela Fórmula de Binet,

$$\begin{aligned}
 F_{n+1} + F_n &= \\
 \sum_{0 \leq k \leq (n+1)/2} \binom{n-k+1}{k} + \sum_{0 \leq k \leq n/2} \binom{n-k}{k} &= \\
 \sum_{0 \leq k \leq (n+1)/2} \binom{n-k+1}{k} + \sum_{1 \leq k \leq n/2-1} \binom{n-(k-1)}{k-1} &= \\
 \binom{n+1}{0} + \sum_{1 \leq k \leq (n+1)/2} \left(\binom{n-k+1}{k} + \binom{n-k+1}{k-1} \right) &= \\
 \binom{n+1}{0} + \sum_{1 \leq k \leq (n+1)/2} \binom{n-k+2}{k} &= \\
 \binom{n+1}{0} + \sum_{1 \leq k \leq (n+1)/2} \binom{n-k+2}{k} &= \\
 \sum_{0 \leq k \leq (n+2)/2} \binom{n-k+2}{k} &= \\
 F_{n+2}. &
 \end{aligned}$$

25. Como $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{i} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} - 2 \right) \\ &= \frac{2^n - 2}{2} \\ &= 2^{n-1} - 1. \end{aligned}$$

Como a soma anterior é um número ímpar, ela contém um número ímpar de termos ímpares.

26. Pela identidade do exercício 13, com $m = n$ e $p = n - 2$, temos

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n}{i} \binom{n}{i+2} \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n}{i} \binom{n}{n-i-2} \\ &= \binom{2n}{n-2}. \end{aligned}$$

27. Primeira Solução

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n r^2 \binom{n}{r} &= \sum_{r=1}^n r^2 \binom{n}{r} \\ &= \sum_{r=1}^n r^2 \frac{n}{r} \binom{n-1}{r-1} \\ &= n \sum_{r=1}^n r \binom{n-1}{r-1} \\ &= n \left(\sum_{r=2}^n (r-1) \binom{n-1}{r-1} \right) + n \left(\sum_{r=1}^n \binom{n-1}{r-1} \right) \\ &= n \left(\sum_{r=2}^n (r-1) \frac{n-1}{r-1} \binom{n-2}{r-2} \right) + \\ &+ n \left(\sum_{r=1}^n \binom{n-1}{r-1} \right) \\ &= n(n-1) \sum_{r=2}^n \binom{n-2}{r-2} + n2^{n-1} \\ &= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} \\ &= n(n+1)2^{n-2}. \end{aligned}$$

Segunda Solução

Seja S o número de maneiras de escolhermos um subconjunto não vazio de um grupo contendo n crianças e, sem seguida, darmos um caramelo para uma delas e, finalmente, darmos um chocolate também para uma das escolhidas. As crianças que irão receber o caramelo e o chocolate não precisam ser distintas. Para determinar

S , veja que existem $\binom{n}{r}$ grupos de r crianças e uma vez escolhido esse grupo, existem $r \cdot r = r^2$ maneiras de distribuímos o caramelo e o chocolate. Basta agora somarmos sobre todos os valores possíveis de r crianças obtendo $\sum_{r=1}^n r^2 \binom{n}{r}$.

Outra contagem que produz o mesmo número é inicialmente escolher as crianças que receberão os doces e posteriormente suas companheiras. Precisamos considerar dois casos. Se a criança que recebe o caramelo é a mesma que recebe o chocolate, existem n tais escolhas. Em seguida, podemos escolher um subconjunto qualquer das crianças que sobraram para formarem um subconjunto com ela de 2^{n-1} maneiras. Quando as crianças são distintas, temos $n(n-1)$ maneiras de distribuímos o caramelo e o chocolate. Em seguida, nos restam 2^{n-2} possíveis subconjuntos das crianças restantes. Assim,

$$S = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = n(n+1)2^{n-2}.$$

28.

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} 7^k \\ &= \sum_{k=0}^n k^2 \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} 7^k \\ &= n \sum_{k=1}^n k \binom{n-1}{k-1} 7^k \\ &= n \left(\sum_{k=1}^n (k-1) \binom{n-1}{k-1} 7^k \right) + n \left(\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} 7^k \right) \\ &= n \left(\sum_{k=2}^n (k-1) \frac{n-1}{k-1} \binom{n-2}{k-2} 7^k \right) + n \left(\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} 7^k \right) \\ &= n(n-2) \left(\sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} 7^k \right) + n \left(\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} 7^k \right) \\ &= n(n-2)(1+7)^{n-2} + n(1+7)^{n-1} \\ &= n(n+6)8^{n-2}. \end{aligned}$$