

Módulo de Função Afim

Noções Básicas.

9º ano E.F.



1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Em certa cidade, uma corrida de táxi custa R\$ 4,80 a bandeirada, mais R\$ 0,40 por quilômetro rodado. Quanto custa uma corrida de 50 quilômetros?

Exercício 2. O grau Fahrenheit (símbolo: $^{\circ}F$) é uma escala de temperatura proposta por Daniel Gabriel Fahrenheit em 1724. Nesta escala o ponto de fusão da água ($0^{\circ}C$) é de $32^{\circ}F$ e o ponto de ebulição da água ($100^{\circ}C$) é de $212^{\circ}F$. Em que temperatura as escalas Celsius e Fahrenheit assinalam o mesmo valor?

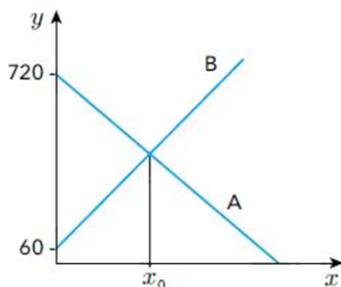
Exercício 3. O custo total, por mês, de um serviço de fotocópias, com cópias do tipo A4, consiste de um custo fixo acrescido de um custo variável. O custo variável depende, de forma diretamente proporcional, da quantidade de páginas reproduzidas. Em um mês em que esse serviço fez 50000 cópias, seu custo total foi de R\$ 21000,00, enquanto que em um mês em que fez 20000 cópias, seu custo total foi de R\$ 19200,00. Supondo que o custo por página seja o mesmo nos meses mencionados, determine-o.

Exercício 4. Um experimento da área de Agronomia mostra que a temperatura mínima da superfície do solo $t(x)$, em $^{\circ}C$, é determinada em função do resíduo x de planta e biomassa na superfície, em g/m^2 , conforme registrado na tabela seguinte.

$x[g/m^2]$	10	20	30	40	50	60	70
$t(x)[^{\circ}C]$	7,24	7,30	7,36	7,42	7,48	7,54	7,60

Qual a lei de formação da função $t(x)$?

Exercício 5. O reservatório A perde água a uma taxa constante de 10 litros por hora, enquanto o reservatório B ganha água a uma taxa constante de 12 litros por hora. No gráfico, estão representados, no eixo y , os volumes, em litros, da água contida em cada um dos reservatórios, em função do tempo, em horas, representado no eixo x . Determine o tempo x_0 , em horas, indicado no gráfico.



2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. “Em fevereiro, o governo da Cidade do México, metrópole com uma das maiores frotas de automóveis do mundo, passou a oferecer à população bicicletas como opção de transporte. Por uma anuidade de 24 dólares, os usuários têm direito a 30 minutos de uso livre por dia. O ciclista pode retirar em uma estação e devolver em qualquer outra e, se quiser estender a pedalada, paga 3 dólares por hora extra.” (Revista Exame. 21 abr. 2010.)

A expressão que relaciona o valor f pago pela utilização da bicicleta por um ano, quando se utilizam x horas extras nesse período é:

- a) $f(x) = 3x$.
b) $f(x) = 24$.
c) $f(x) = 27$.
d) $f(x) = 3x + 24$.
e) $f(x) = 24x + 3$.

Exercício 7. Em uma corrida de táxi é cobrado um valor inicial chamado de a bandeirada, mais uma quantia proporcional por quilômetro rodado. Se por uma corrida de 8 km paga-se R\$ 28,50 e por uma corrida de 5 km paga-se R\$ 19,50. Qual o valor da bandeirada?

Exercício 8. Duas pessoas combinaram de se encontrar entre 13 h e 14 h, no exato instante em que a posição do ponteiro dos minutos do relógio coincidissem com a posição do ponteiro das horas. Dessa forma, qual o horário que o encontro foi marcado?

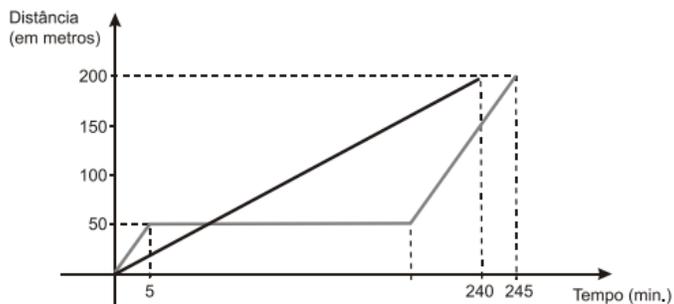
Exercício 9. Cláudio, gerente capacitado de uma empresa que produz e vende instrumentos musicais, contratou uma consultoria para analisar o sistema de produção. Os consultores, após um detalhado estudo, concluíram que o custo total de produção de x flautas de determinado tipo pode ser expresso pela função $C(x) = 2400 + 36x$, sendo R\$ 2400,00 o custo fixo. Atualmente a empresa vende 60 flautas daquele tipo por mês, ao preço de R\$ 120,00 por unidade. O trabalho da empresa de consultoria demonstrou, também, que um gasto extra de R\$ 1200,00 em publicidade provocaria um aumento de 15% no volume atual de vendas das flautas. Na sua opinião, Cláudio deveria autorizar o gasto extra em publicidade?

Exercício 10. Tome três pontos distintos A, B e C. Mostre que se suas coordenadas estão na mesma fórmula $y = ax + b$, então esses pontos estão alinhados e conclua que o gráfico da Função Afim é uma reta.

Exercício 11. Uma função f definida de \mathbb{R}_+ em \mathbb{R}_+ , crescente, satisfaz à equação $f(5x) = 5f(x)$ para todo x real não-negativo. Se $f(25) = 125$, então qual o valor de $f(1)$?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

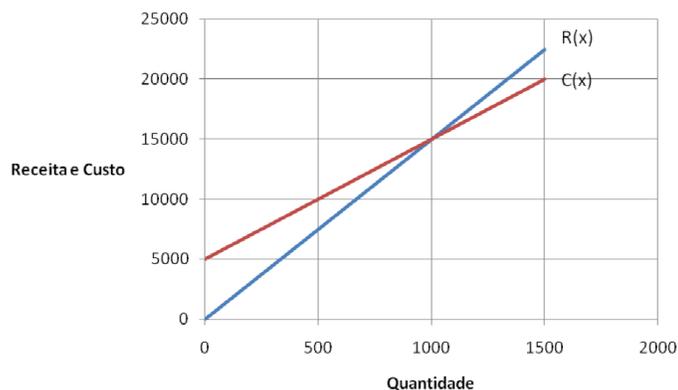
Exercício 12. A fábula da lebre e da tartaruga, do escritor grego Esopo, foi recontada utilizando-se o gráfico abaixo para descrever os deslocamentos dos animais.



Suponha que na fábula a lebre e a tartaruga apostam uma corrida em uma pista de 200 metros de comprimento. As duas partem do mesmo local no mesmo instante. A tartaruga anda sempre com velocidade constante. A lebre corre por 5 minutos, para, deita e dorme por certo tempo. Quando desperta, volta a correr com a mesma velocidade constante de antes, mas, quando completa o percurso, percebe que chegou 5 minutos depois da tartaruga. Considerando essas informações,

- determine a velocidade média da tartaruga durante esse percurso, em metros por hora.
- determine após quanto tempo da largada a tartaruga alcançou a lebre.
- determine por quanto tempo a lebre ficou dormindo.

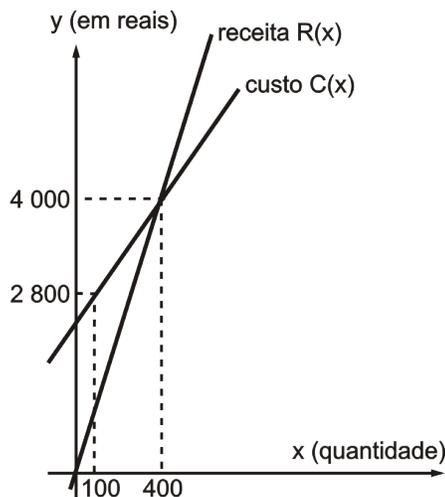
Exercício 13. Os gráficos abaixo representam as funções receita mensal $R(x)$ e custo mensal $C(x)$ de um produto fabricado por uma empresa, em que x é a quantidade produzida e vendida. Qual o lucro obtido ao se produzir e vender 1350 unidades por mês?



Exercício 14. Os preços dos ingressos de um teatro nos setores 1, 2 e 3 seguem uma função polinomial do primeiro grau crescente com a numeração dos setores. Se o preço do ingresso no setor 1 é de R\$ 120,00 e no setor 3 é de R\$ 400,00, então qual o preço do ingresso no setor 2?

Exercício 15. Considerando um intervalo de tempo de 10 anos a partir de hoje, o valor de uma máquina deprecia linearmente com o tempo, isto é, o valor da máquina y em função do tempo x é dado por uma função polinomial do primeiro grau $y = ax + b$. Se o valor da máquina daqui a dois anos for R\$ 6400,00, e seu valor daqui a cinco anos e meio for R\$ 4300,00, qual será o seu valor daqui a sete anos?

Exercício 16. Paulo é um fabricante de brinquedos que produz determinado tipo de carrinho. A figura a seguir mostra os gráficos das funções custo total e receita, considerando a produção e venda de x carrinhos fabricados na empresa de Paulo.



- Existem custos tais como: aluguel, folha de pagamento dos empregados e outros, cuja soma denominamos custo fixo, que não dependem da quantidade produzida, enquanto a parcela do custo que depende da quantidade produzida, chamamos de custo variável. A função custo total é a soma do custo fixo com o custo variável. Na empresa de Paulo, qual o custo fixo de produção de carrinhos?
- A função lucro é definida como sendo a diferença entre a função receita total e a função custo total. Quantos carrinhos Paulo tem que vender para obter um lucro de R\$ 2.700,00?
- A diferença entre o preço pelo qual a empresa vende cada carrinho e o custo variável por unidade é chamada de margem de contribuição por unidade. Portanto, no que diz respeito aos carrinhos produzidos na fábrica de Paulo, qual a margem de contribuição por unidade?

Respostas e Soluções.

1. (Extraído da Vídeo Aula)

Observe que o preço da corrida “P” pode ser dado em função da quantidade “x” de quilômetros rodados pela fórmula

$$P(x) = 0,4x + 4,8.$$

Como foram rodados 50 quilômetros, basta substituir o x por esse valor e desenvolver os cálculos obtendo

$$\begin{aligned} P(x) &= 0,4x + 4,8 \\ P(50) &= 0,4 \cdot 50 + 4,8 \\ &= 20 + 4,8 \\ &= 24,8 \text{ reais.} \end{aligned}$$

2. Estabelecendo uma relação entre o grau Celsius (“x”) e o grau Fahrenheit (“f(x)”) por uma Função Afim, podemos concluir que $f(0) = 32$ e $f(100) = 272$. Substituindo esses valores em $f(x) = ax + b$ teremos

$$\begin{cases} 32 = a \cdot 0 + b \\ 272 = a \cdot 100 + b, \end{cases}$$

com $b = 32$ e $a = 1,8$, chegando a $f(x) = 1,8x + 32$. Agora, o problema pergunta onde $f(x) = x$ e desenvolvendo ficamos com

$$\begin{aligned} f(x) &= 1,8x + 32 \\ x &= 1,8x + 32 \\ 0,8x &= -32 \\ x &= -40^\circ \text{ C.} \end{aligned}$$

Ou seja, $-40^\circ \text{ C} = -40^\circ \text{ F}$.

3. (Extraído da Vídeo Aula)

Se há uma proporcionalidade envolvida, esse problema é de Função Afim. Sendo $f(x)$ o preço pago por x cópias e transformando as relações suprimindo as casas dos milhares, criaremos as seguintes relações $f(50) = 21$ e $f(20) = 19,2$ que após substituídas produzem

$$\begin{cases} 21 = a \cdot 50 + b \\ 19,2 = a \cdot 20 + b, \end{cases}$$

que resulta em $a = \frac{3}{50} = 0,06$ e $b = 18$. Por fim, cada cópia custa 6 centavos.

4. (Adaptado da vídeo aula)

Observe na tabela que a cada $\Delta x = 10$ unidades há um $\Delta t = 0,06$. Então, essa é uma função afim com $a = \frac{0,06}{10}$. Agora para o b basta calcularmos o valor de $t(0)$, completado a tabela com mais uma variação, só que no sentido oposto.

$x[g/m^2]$	0	10	20
$t(x)[^\circ\text{C}]$	$7,24 - 0,06$	7,24	7,30

Logo, $b = 7,18$ e $t(x) = 0,06x + 7,18$.

5. (Extraído da UERJ – 2014)

Na figura o x_0 é o momento que os dois reservatório estão com o mesmo volume “V”. Como A toca no eixo y em 720, então $b_A = 720$ e da interpretação do enunciado $a_A = -10$ então $V_A(x) = -10x + 720$. Analogamente, $b_B = 60$ e $a_B = 12$, então $V_B(x) = 12x + 60$. Queremos o x_0 tal que $V_A(x_0) = V_B(x_0)$. Temos então

$$\begin{aligned} V_A(x_0) &= V_B(x_0) \\ -10x_0 + 720 &= 12x_0 + 60 \\ 22x_0 &= 660 \\ x_0 &= 30 \text{ horas.} \end{aligned}$$

6. (Extraído do ENEM)

O valor fixo inicial se traduz no conceito de b numa Função Afim, logo $b = 24$ e o valor 3 que influencia de modo proporcional na quantidade gasta com relação às horas ficamos com $a = 3$. Logo, a função será $f(x) = 3x + 24$, o que está na **letra D**.

7. (Extraído da Vídeo Aula)

Podemos criar as seguintes relações $f(8) = 28,5$ e $f(5) = 19,5$ que após desenvolvidas como pares em uma Função Afim produzem

$$\begin{cases} 28,5 = a \cdot 8 + b \\ 19,5 = a \cdot 5 + b, \end{cases}$$

o que gera $a = 3$ e $b = 4,5$. Então, a bandeirada custa R\$ 4,50.

8. (Adaptado do vestibular da FGV – 2012)

O ponteiro dos minutos se desloca 360° em uma hora, isto é, $\frac{360}{60} = 6^\circ$ por minuto. Sendo M o deslocamento do ponteiro grande do relógio em x minutos, teremos $M(x) = 6x$. Para o ponteiro das horas teremos um deslocamento de $\frac{360}{12} = 30^\circ$ por hora, ou seja, $\frac{30}{60} = 0,5^\circ$ por minuto, mas já se passou uma hora, então o ponteiro das horas já andou 30° . Denominando H o deslocamento do ponteiro pequeno em x minutos, chegamos a $H(x) = 0,5x + 30$. Queremos saber quando os ponteiros estarão sobrepostos, isso acontece quando $M(x) = H(x)$, desenvolvendo essa

última chegaremos a

$$\begin{aligned}M(x) &= H(x) \\6x &= 0,5x + 30 \\5,5x &= 30 \\x &= \frac{30}{5,5} \\x &= \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11} \text{ min.}\end{aligned}$$

Para as 13 h e $5\frac{5}{11}$ min.

9. (Extraído do vestibular da FGV)

Inicialmente, para vender 60 flautas temos o custo de $2400 + 36 \cdot 60 = 4560$ e após a venda de todas ficamos com uma receita de $60 \cdot 120 = 7200$. O lucro ficou em $7200 - 4560 = 2640$. Se houver gastos com publicidade, o número de flautas vendidas subirá 15% (fator de crescimento 1,15) e chegaremos a $1,15 \cdot 60 = 69$ flautas, com custo total de $1200 + 2400 + 36 \cdot 69 = 6084$ reais e nova receita de $69 \cdot 120 = 8280$. Assim, o lucro será de $8280 - 6084 = 2196$ reais. Cláudio não deve autorizar o gasto com publicidade visto que o lucro no primeiro caso foi maior.

10. A distância entre dois pontos pode ser calculada pela fórmula $d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Usando a fórmula $y = ax + b$ e fazendo as devidas substituições obtemos que

$$\begin{aligned}d_{A,B} &= (x_B - x_A)\sqrt{1 + a^2} \\d_{B,C} &= (x_C - x_B)\sqrt{1 + a^2} \\d_{A,C} &= (x_C - x_A)\sqrt{1 + a^2}.\end{aligned}$$

e por fim, somando as duas primeiras teremos que

$$\begin{aligned}d_{A,B} + d_{B,C} &= (x_B - x_A)\sqrt{1 + a^2} + (x_C - x_B)\sqrt{1 + a^2} \\&= (x_C - x_A)\sqrt{1 + a^2} \\&= d_{A,C}.\end{aligned}$$

Ora, então A , B e C estão alinhados, são colineares. Logo, o gráfico de uma Função Afim é uma reta. ■

11. (Extraído da Vídeo Aula)

Como $f(5x) = 5f(x)$ podemos fazer

$$\begin{aligned}f(5 \cdot 1) &= 5 \cdot f(1) \text{ e} \\f(5 \cdot 5) &= 5 \cdot f(5).\end{aligned}$$

Desenvolvendo as contas, substituindo os valores dados e multiplicando as equações chegaremos a

$$\begin{aligned}f(5) \cdot f(25) &= 5 \cdot 5 \cdot f(1) \cdot f(5) \\125 &= 25 \cdot f(1) \\f(1) &= 5.\end{aligned}$$

12. (Extraído da UFMG – 2013)

a) Observe que a tartaruga completou os 200 metros em 240 minutos, ou seja, em 4 horas. Portanto, sua velocidade média foi de $\frac{200}{4} = 50$ metros por hora.

b) A lebre correu 50 metros e parou para dormir. A função f que determina a quantidade de metros percorridos pela tartaruga em função do tempo t em minutos é $f(t) = \frac{200}{240}t$. Queremos saber em quanto tempo a tartaruga percorreu 50 metros, então ficaremos com

$$\begin{aligned}\frac{200}{240}t &= 50 \\t &= 60 \text{ min} = 1 \text{ h.}\end{aligned}$$

c) A lebre percorreu 50 m em 10 min, logo sua velocidade média foi de 10 metros por minuto. Para percorrer 200, ela deveria gastar 20 min, como gastou 245, então ela dormiu $245 - 20 = 225$ min.

13. (Extraído do vestibular da FGV – 2012)

Interpretando os gráficos teremos que a função $R(x) = a_R \cdot x + b_R$ tem $b_R = 0$ e como $R(1000) = 15000$, teremos $a_R = 15$. Portanto, obtemos $R(x) = 15x$. Agora, para $C(x) = a_C \cdot x + b_C$, teremos $b_C = 5000$ e $a_C = \frac{15000 - 5000}{1000 - 0} = 10$, ou seja, $C(x) = 10x + 5000$. Para calcularmos o lucro basta fazermos

$$\begin{aligned}R(1350) - C(1350) &= 15 \cdot 1350 - (10 \cdot 1350 + 5000) \\&= 20250 - 13500 - 5000 \\&= 1750 \text{ reais.}\end{aligned}$$

14. (Adaptado da Vídeo Aula)

Podemos estabelecer uma relação do preço P em função do setor x , então $P(1) = 120$, $P(3) = 400$ e busca-se o valor de $P(2)$. Teremos

$$a = \frac{P(3) - P(1)}{3 - 1} = \frac{400 - 120}{2} = 140.$$

Logo, ficamos com $P(2) = 120 + 140 = 260$ reais.

15. (Adaptado do vestibular da FGV – 2014)

Usando os dados do enunciado teremos que a variação do valor da máquina será $a = \frac{4300 - 6400}{5,5 - 2} = -600$ reais por ano. Entre cinco anos e meio e sete anos haverá uma variação de $1,5 \times (-600) = -900$ reais e o preço ficará $4300 - 900 = 3400$ reais.

16. (Adaptado do vestibular da FGV)

Definindo $C(x) = a_C \cdot x + b_C$ e observando o gráfico da função custo temos que $a_C = \frac{4000 - 2800}{400 - 100} = \frac{1200}{300} = 4$.

Sendo assim, para um $\Delta x = 100$, essa função terá um $\Delta C = 400$, logo teremos que $b_C = 2400$. Seja

$R(x) = a_R \cdot x + b_R$ a função receita, pelo gráfico teremos $b_R = 0$ e $a_R = \frac{4000}{400} = 10$.

a) Sendo assim, o custo fixo será de 2400 reais.

b) A função lucro será

$$\begin{aligned}L(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 10x - (4x + 2400) \\ &= 6x - 2400.\end{aligned}$$

Para um lucro de 2700 deveremos ter

$$\begin{aligned}6x - 2400 &= 2700 \\ 6x &= 5100 \\ x &= 850 \text{ carrinhos.}\end{aligned}$$

c) O preço de venda é de 10 reais e o preço de custo de 4 reais, portanto a margem de contribuição é de 6 reais.