Módulo de Círculo Trigonométrico

Radiano, Círculo Trigonométrico e Congruência de Arcos

1ª série E.M.

Portal da Matemática
OBMEP

Círculo Trigonométrico
Radiano, Círculo Trigonométrico e Congruência de Arcos.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Se o comprimento de uma circunferência é 2πcm, determine o comprimento de um arco, nesta circunferência, de

a) $180°$

b) $90°$

c) $45°$

d) $60°$

e) $30°$

f) $120°$

g) $270°$

Exercício 2. Expresse em radianos:

a) $30°$.

b) $45°$.

c) $60°$.

d) $120°$.

e) $135°$.

f) $150°$.

g) $225°$.

h) $300°$.

Exercício 3. Expresse em graus:

a) 2π rad.

b) π rad.

c) $\dfrac{\pi}{2}$ rad.

d) $\dfrac{\pi}{4}$ rad.

e) $\dfrac{\pi}{6}$ rad.

f) $\dfrac{3\pi}{4}$ rad.

g) $\dfrac{7\pi}{6}$ rad.

h) $\dfrac{11\pi}{6}$ rad.

Exercício 4. Determine a expressão geral dos arcos côngruos aos arcos de:

a) $30°$.

b) $60°$.

c) $135°$.

d) π rad.

e) $\dfrac{\pi}{4}$ rad.

Exercício 5. Determine a primeira determinação positiva dos arcos:

a) $400°$.

b) $900°$.

c) $1500°$.

d) $-860°$.

e) $\dfrac{19\pi}{4}$ rad.

f) $\dfrac{81\pi}{6}$ rad.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. Determine, em radianos, a medida do ângulo central correspondente a um arco de $12cm$ em uma circunferência de $4cm$ de raio.

Exercício 7. Determine o comprimento, em centímetros, de um arco correspondente a um ângulo central de $60°$ em uma circunferência de 8cm de raio.

Exercício 8. Determine a medida, em graus, do menor ângulo formado pelos ponteiros das horas e dos minutos de um relógio analógico às:

a) $5h$.

b) $9h30min$.

c) $11h40min$.

d) $1h20min$.

e) $3h25min$.

Exercício 9. Um pêndulo de 50cm, descreve um movimento no qual suas posições extremas formam um ângulo de $45°$. Determine o comprimento dessa trajetória (de uma posição extrema à outra).

Exercício 10. Uma roda-gigante de $60m$ de diâmetro possui 18 cabines numeradas sequencialmente de 1 a 18. Tino e sua namorada entram na cabine 5. A roda-gigante começa a girar, mas, para que fosse possível a entrada de outro casal, ela para na cabine 9 logo em seguida. Determine a distância, em metros, percorrida pela cabine de Tino nesse deslocamento.

Exercício 11. Em uma pista circular de 400 m de comprimento, Joaquim Barbosa realiza um treinamento no qual ele corre 160m na maior velocidade que consegue e faz pausas por $30s$, repetindo o processo 12 vezes. Determine:

a) o raio aproximado desta pista.

b) a medida, em graus, do arco determinado em cada treinamento.

c) a medida da menor determinação positiva do ângulo encontrado no item anterior.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

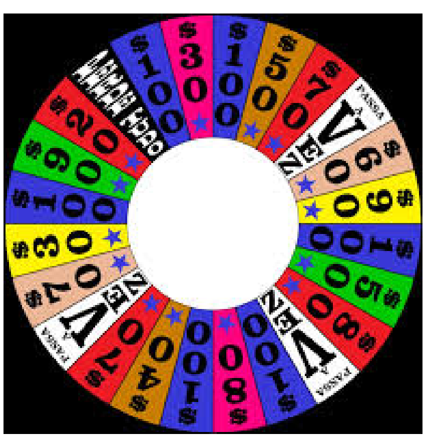
Exercício 12. Marca-se em um pneu, no ponto de seu contato com o solo, um ponto com tinta, que chamaremos de A. O carro percorre um determinado trecho, onde o pneu gira $18780°$. Qual a distância do ponto A ao novo ponto de contato do pneu com o solo, chamado de P, em função do raio r do pneu?

Exercício 13. Em um programa que se chama Roda a Roda, existe uma roleta que os participantes giram para saber qual o seu prêmio, conforme a figura. A roleta deve estar posicionada sempre no PERDE TUDO antes do giro de qualquer participante e o giro deve ser sempre no sentido horário.

a) Jairo gira a roleta $2760°$. Qual é seu prêmio?

b) Qual o menor ângulo para que o prêmio de Juarez seja 100?

c) Quais ângulos fazem com que Josué perca a vez ou perca tudo?



Exercício 14. Considere um círculo trigonométrico com centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas. Quais arcos possuem a mesma abscissa, analisando apenas a primeira determinação positiva, que os arcos de

a) $25°$.

b) $130°$.

c) $315°$.

d) $190°$.

e) $\dfrac{3\pi}{5}$ rad.

f) $\dfrac{\pi}{6}$ rad.

Exercício 15. Considere um círculo trigonométrico com centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas. Quais arcos possuem a mesma ordenada, analisando apenas a primeira determinação positiva, que os arcos de

a) $55°$.

b) $110°$.

c) $300°$.

d) $220°$.

e) $\dfrac{2\pi}{5}$rad.

f) $\dfrac{5\pi}{6}$rad.

Exercício 16. Nos X-Games Brasil, em maio de 2004, o skatista brasileiro Sandro Dias, apelidado Mineirinho, conseguiu realizar a manobra denominada 900, na modalidade skate vertical, tornando-se o segundo atleta no mundo a conseguir esse feito. A denominação 900 refere-se ao número de graus que o atleta gira no ar em torno de seu próprio corpo, que, no caso, corresponde a:

a) uma volta completa.

b) uma volta e meia.

c) duas voltas completas.

d) duas voltas e meia.

e) cinco voltas completas.

Respostas e Soluções.

1.

a) $2\pi \cdot \frac{180°}{360°} = \pi$ cm.

b) $2\pi \cdot \frac{90°}{360°} = \pi/2$ cm.

c) $2\pi \cdot \frac{45°}{360°} = \pi/4$ cm.

d) $2\pi \cdot \frac{60°}{360°} = \pi/3$ cm.

e) $2\pi \cdot \frac{30°}{360°} = \pi/6$ cm.

f) $2\pi \cdot \frac{120°}{360°} = 2\pi/3$ cm.

g) $2\pi \cdot \frac{270°}{360°} = 3\pi/2$ cm.

2.

a) $30° = \frac{180°}{6} = \frac{\pi}{6}$ rad.

b) $45° = \frac{180°}{4} = \frac{\pi}{4}$ rad.

c) $60° = \frac{180°}{3} = \frac{\pi}{3}$ rad.

d) $120° = \frac{360°}{3} = \frac{2\pi}{3}$ rad.

e) $135° = 3 \cdot 45° = \frac{3\pi}{4}$ rad.

f) $150° = 5 \cdot 30° = \frac{5\pi}{6}$ rad.

g) $225° = 5 \cdot 45° = \frac{5\pi}{4}$ rad.

h) $300° = 5 \cdot 60° = \frac{5\pi}{3}$ rad.

3.

a) $2 \cdot 180° = 360°$.

b) $180°$.

c) $\frac{180°}{2} = 90°$.

d) $\frac{180°}{4} = 45°$.

e) $\frac{180°}{6} = 30°$.

f) $\frac{3 \cdot 180°}{4} = 135°$.

g) $\frac{7 \cdot 180°}{6} = 210°$.

h) $\frac{11 \cdot 180°}{6} = 330°$.

4.

a) $30° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$.

b) $60° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$.

c) $135° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$.

d) $\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

e) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

5.

a) $400° - 360° = 40°$.

b) $900° - 2 \cdot 360° = 180°$.

c) $1500° - 4 \cdot 360° = 60°$.

d) $-860° + 3 \cdot 360° = 220°$.

e) $\frac{19\pi}{4} - \frac{16\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ rad.

f) $\frac{81\pi}{6} - \frac{72\pi}{6} = \frac{9\pi}{6}$ rad.

6. $\alpha = \frac{12}{4} = 3\text{rad}$.

7. Como a medida do comprimento desta circunferência é $2\pi \cdot 8 = 16\pi$ cm, a medida do comprimento do arco é $\frac{60°}{360°} \cdot 16\pi = \frac{8\pi}{3}$ cm.

8. A cada volta completa do ponteiro grande (minutos), o ponteiro pequeno (horas) anda uma hora, ou seja, $\frac{360°}{12} = 30°$, que é o valor da distância angular entre dois números consecutivos de um relógio analógico.

a) $5 \cdot 30° = 150°$.

b) Se o ponteiro pequeno estivesse sobre o 9 e o grande sobre o 6, o ângulo seria $3 \cdot 30° = 90°$. Porém, o ponteiro pequeno desloca-se de forma proporcional ao deslocamento do ponteiro grande. Como o grande deu meia-volta, o pequeno percorreu metade de $30°$. Assim, o menor ângulo entre eles é $90° + 15° = 105°$.

c) Seguindo o mesmo raciocínio do item anterior, temos $\alpha = 3 \cdot 30° + \frac{40}{60} \cdot 30° = 110°$.

d) Neste caso, o ponteiro grande está depois do pequeno, isto significa que devemos subtrair o deslocamento do pequeno. Assim, temos $\alpha = 3 \cdot 30° - \frac{20}{60} \cdot 30° = 80°$.

e) Como o ponteiro grande está depois do pequeno, temos $\alpha = 60° - \frac{25}{60} \cdot 30° = 60° - 12°30' = 47°30'$.

9. Se o movimento realizado completasse uma circunferência, o comprimento da trajetória seria $2\pi \cdot 50 = 100\pi\ cm$. Porém, a trajetória envolve apenas uma parte dessa circunferência. Temos, então, que o comprimento desse arco é $\ell = \dfrac{100\pi}{8} = \dfrac{25\pi}{2}$cm.

10. O ângulo central determinado por duas cabines consecutivas é de $360°/18 = 20°$. O arco determinado pelas cabines 5 e 9 possui um ângulo que mede $4 \cdot 20° = 80°$. Assim, essa distância será $\ell = 2\pi \cdot 30 \cdot \dfrac{80°}{360°} = \dfrac{40\pi}{3}\ m$.

11.

a) $2\pi r = 400$, segue que $r = 200/\pi \cong 63,7$m.

b) A cada 400 m temos $360°$. O comprimento total de cada treino é, em metros, $12 \cdot 160 = 1.920 = 4 \cdot 400 + 320$. Assim, a medida do arco é $4 \cdot 360° + \dfrac{320}{400} \cdot 360° = 1728°$.

c) Como temos 4 voltas completas mais $288°$, a menor determinação positiva desse ângulo é $288°$.

12. Como $18780° = 52 \cdot 360° + 60°$, significa que o pneu deu 52 voltas completas mais $60°$. Isso significa que o ângulo central determinado pelo ponto A e o ponto P mede $60°$, ou seja, estes pontos e o centro da roda formam um triângulo equilátero. Assim, a distância entre os pontos A e P é r. Veja a figura.

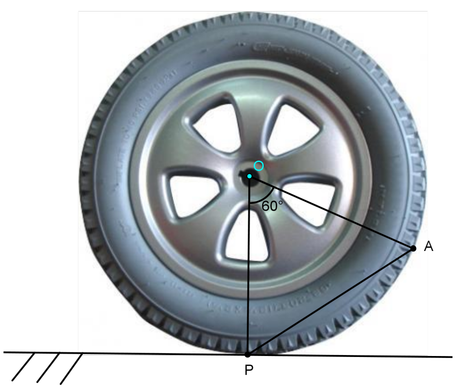


Figura 1: Posição Final do Pneu

13.

a) Como $2760° = 7 \cdot 360° + 240°$, a roleta dá 7 voltas completas mais $240°$ da oitava volta, ou seja, $240°$ é a menor determinação positiva. Se a roleta é dividida em 24 faixas de prêmios (não necessariamente todos diferentes), significa que o prêmio ganho por Jairo está na faixa de número $\dfrac{240°}{360°} \cdot 24 = 16$, que vale 90. Observe que ao girar a roleta no sentido horário, a passagem das faixas pelo ponto inicial de referência se dá no sentido anti-horário. É como se um relógio tivesse os ponteiros parados e a base com os números girasse.

b) O primeiro prêmio de 100, em relação à posição inicial, fica na terceira faixa. Assim, o menor ângulo é $\dfrac{3}{24} \cdot 360° = 45°$.

c) PASSA A VEZ E PERDE TUDO são as faixas múltiplas de 6, ou seja, eles aparecem (um ou outro) de $\dfrac{6}{24} \cdot 360° = 90°$ em $90°$. Portanto, isso ocorrerá nos ângulos da forma $90°k$, $k \in \mathbb{N}$.

14. Esse exercício requer descobrir o simétrico de cada arco em relação ao eixo x. Para isso, basta, a partir da origem do círculo trigonométrico, seguir no sentido horário, ou seja, é necessário apenas subtrair de $360°$ ou 2πrad o arco em questão.

a) $360° - 25° = 335°$.

b) $360° - 130° = 230°$.

c) $360° - 315° = 45°$.

d) $360° - 190° = 170°$.

e) $2\pi - \dfrac{3\pi}{5} = \dfrac{7\pi}{5}$rad.

f) $2\pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{11\pi}{6}$rad.

15. Perceba que nesse exercício, diferente do anterior, o eixo de simetria é o eixo y, assim, basta tomar como ponto de partida $90°$ ou $270°$, analisando, de acordo com o quadrante, qual operação deve ser realizada.

a) $90° + (90° - 55°) = 125°$, pois o ângulo pertence ao primeiro quadrante.

b) $90° - (110° - 90°) = 70°$, pois o ângulo pertence ao segundo quadrante.

c) $270° - (300° - 270°) = 240°$, pois o ângulo pertence ao quarto quadrante.

d) $270° + (270° - 220°) = 320°$, pois o ângulo pertence ao terceiro quadrante.

e) $\dfrac{\pi}{2} + \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{3\pi}{5}$rad.

f) $\dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{5\pi}{6} - \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$rad.

16. (ENEM) Se cada volta completa tem $360°$ e $900° = 2 \cdot 360° + 180°$, então o atleta girou duas voltas e meia. Resposta D.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com