**Módulo de Função Quadrática**

**Noções Básicas: Definição, Máximos e Mínimos**

$1^a$ **série E.M.**

**Professores Tiago Miranda e Cleber Assis**

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

**Função Quadrática**
**Noções Básicas: Definição, Máximos e Mínimos**

## 1 Exercícios Introdutórios

**Exercício 1.** Em cada um dos itens abaixo classifique o grau do polinômio associado à respectiva função:

a) $y = 2x + 4$

b) $y = x^2 + 5$

c) $y = x^3 + x^4 + 2x^2 + 3x - 2$

d) $y = -3x^2 - 7x + 6$

e) $y = -2x - 1$

**Exercício 2.** Analise as alternativas e identifique os coeficientes $a$, $b$ e $c$ na estrutura $y = ax^2 + bx + c$ das funções abaixo:

a) $y = 2x^2 + 4x - 3$

b) $y = -3x^2 + x + 5$

c) $y = x^2 - 9$

d) $y = x^2 + 7x$

**Exercício 3.** Nas funções quadráticas há um discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Calcule o discriminante das funções abaixo:

a) $y = x^2 - 6x + 5$

b) $y = -2x^2 + 9x - 7$

c) $y = x^2 + 1$

d) $y = x^2 - 3x$

**Exercício 4.** Em cada um dos itens abaixo, determine, a partir do discriminante, quantos zeros reais terá a função:

a) $y = x^2 - 8x + 7$

b) $y = -3x^2 + 5x - 2$

c) $y = x^2 + 4$

d) $y = -x^2 + 6x - 9$

e) $y = x^2 - x + 10$

**Exercício 5.** Em cada um dos itens abaixo, determine se o ponto do vértice é de máximo ou mínimo:

a) $y = x^2 + x$

b) $y = -5x^2 + x + 4$

c) $y = 4x^2 - 9$

d) $y = -x^2 + 4x - 4$

**Exercício 6.** Calcule as coordenadas do vértice de cada função do item anterior.

## 2 Exercícios de Fixação

**Exercício 7.** O lucro $L$ de uma microempresa, em função do número de funcionários $n$ que nela trabalham, é dado, em milhares de reais, pela fórmula $L(n) = 36n - n^2$. Com base nessas informações, qual o número de trabalhadores ideal para que o lucro dessa microempresa seja máximo?

**Exercício 8.** Determine $\beta$ na função real

$$y = \frac{x^2}{2} - 3x + \beta$$

para que o valor mínimo seja $-\frac{1}{2}$.

**Exercício 9.** O gráfico da função quadrática $y = x^2 - mx + (m-1)$, com $m \in \mathbb{R}$, tem um único ponto comum com o eixo das abscissas. Sendo assim, qual o valor de $y$ que essa função associa a $x = 2$?

**Exercício 10.** A parábola que representa graficamente a função

$$y = -2x^2 + bx + c$$

passa pelo ponto $(1, 0)$ e seu vértice é o ponto $(3, k)$. Qual o valor de $k$?

**Exercício 11.** Uma função quadrática ($y = ax^2 + b + c$) tem o eixo do $y$ como eixo de simetria. A distância entre os zeros da função é de 4 unidades e o valor mínimo da função é $-5$. Qual o valor de $a$ nessa função?

**Exercício 12.** Um corpo lançado a partir do solo descreveu uma parábola de equação $y = 100x - 2x^2$, sendo $y$ e $x$, em metros, as distâncias vertical e horizontal em cada instante.

a) Qual a altura máxima que esse corpo atingiu?

b) A que distância do local de lançamento o corpo caiu?

**Exercício 13.** Um comerciante avaliou que, para uma certa mercadoria, o número $n$ de unidades vendidas diariamente podia ser calculado pela expressão $n = 100 - 2x$ , onde $x$ é o preço de venda por unidade. Sabendo-se que cada unidade teve um custo de 10 reais, qual o preço de venda ($x$) que garante o maior lucro?

**Exercício 14.** Karla é aluna do $1^\circ$ ano do Ensino Médio e está estudando função quadrática. Ela chegou em casa com uma dúvida sobre uma questão que o professor de matemática colocou no quadro. O pai dela prontificou-se em ajudá-la. O enunciado do problema era: "Dentre todos os retângulos de perímetro igual a 12 cm qual é o de maior área?" . Após a ajuda de seu pai, qual o lado, em centímetros, do quadrilátero encontrado por ela?

## 3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

**Exercício 15.** Se a função real de variável real, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, é tal que $f(1) = 2$, $f(2) = 5$ e $f(3) = 4$, então qual o valor de $f(4)$?

**Exercício 16.** Se o ponto $(k, 9)$ representa o vértice da parábola determinada pela função quadrática $y = 6x^2 + bx + 15$, então qual o valor da incógnita b?

**Exercício 17.** A equação da trajetória parabólica do salto de uma pulga é dado por $f(x) = -x^2 + 4x$. Essa pulga salta no ponto de origem do sistema de coordenadas cartesianas. Qual é a altura máxima atingida pela pulga?

**Respostas e Soluções.**

**1.**

a) $1^\circ$ grau.

b) $2^\circ$ grau.

c) $4^\circ$ grau.

d) $2^\circ$ grau.

e) $1^\circ$ grau.

**2.**

a) $a = 2$, $b = 4$ e $c = -3$.

b) $a = -3$, $b = 1$ e $c = 5$.

c) $a = 1$, $b = 0$ e $c = -9$.

d) $a = 1$, $b = 7$ e $c = 0$.

**3.**

a) $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16$.

b) $\Delta = (9)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-7) = 81 - 56 = 25$.

c) $\Delta = (0)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4$.

d) $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 9$.

**4.**

a) $\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 64 - 28 = 36 > 0$, assim a função possui dois zeros reais e distintos.

b) $\Delta = (5)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-2) = 25 - 24 = 1 > 0$, assim a função possui dois zeros reais e distintos.

c) $\Delta = (0)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -16 < 0$, assim a função não tem zeros reais.

d) $\Delta = (6)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9) = 36 - 36 = 0$, assim a função possui dois zeros reais e iguais (ou apenas um zero real com multiplicidade).

e) $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 1 - 40 = -39 < 0$, assim a função não possui zeros reais.

**5.**

a) Como $a = 1 > 0$, então temos ponto de mínimo.

b) Como $a = -5 < 0$, então temos ponto de máximo.

c) Como $a = 4 > 0$, então temos ponto de mínimo.

d) Como $a = -1 < 0$, então temos ponto de máximo.

**6.** Temos que $x_V = -\dfrac{b}{2a}$ e $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

a) Assim, $x_V = -\dfrac{1}{2}$ e $y_V = -\left(\dfrac{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}{4 \cdot 1}\right) = -\dfrac{1}{4}$.

b) Assim, podemos escrever $x_V = -\dfrac{1}{2 \cdot (-5)} = \dfrac{1}{10}$ e $y_V = -\left(\dfrac{1^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 4}{4 \cdot (-5)}\right) = -\dfrac{81}{20}$.

c) Daí, ficamos com $x_V = -\dfrac{0}{2 \cdot 4} = 0$ e $y_V = -\left(\dfrac{0^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-9)}{4 \cdot 4}\right) = -9$.

d) Por fim, chegamos a $x_V = -\dfrac{4}{2 \cdot (-1)} = 2$ e $y_V = -\left(\dfrac{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)}{4 \cdot (-1)}\right) = 0$.

**7.** Temos que $a = -3$, $b = 36$, $c = 0$ e o $n$ representa o número de funcionários. Assim, o problema pede para calcularmos o $n_V$, a coordenada $n$ do vértice. Sendo assim, podemos fazer $n_V = -\dfrac{36}{2 \cdot (-3)} = 6$ funcionários.

**8.** O valor mínimo da função é o $y_V$. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}
y_v &= -\frac{\Delta}{4a} \\
-\frac{1}{2} &= -\frac{(-3)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \beta}{4 \cdot \frac{1}{2}} \\
\frac{1}{2} &= \frac{9 - 2\beta}{2} \\
1 &= 9 - 2\beta \\
\beta &= 4.
\end{aligned}$$

**9.** Como a função tangencia o eixo $x$, temos que $\Delta = 0$ e podemos escrever

$$\begin{aligned}
\Delta &= 0 \\
(-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m - 1) &= 0 \\
m^2 - 4m + 4 &= 0 \\
(m - 2)^2 &= 0 \\
m &= 2.
\end{aligned}$$

Portanto, chegamos a $y = x^2 - 2x + 1$ e fazendo $x = 2$ acabamos com $y = 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 1$.

**10.** Como a função passa pelo ponto $(1,0)$, podemos fazer

$$\begin{aligned} 0 &= -2\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c \\ b + c &= 2. \end{aligned}$$

Temos $x_V = 3$, então

$$\begin{aligned} -\frac{b}{2a} &= 3 \\ -\frac{b}{2\cdot(-2)} &= 3 \\ \frac{b}{4} &= 3 \\ b &= 12. \end{aligned}$$

O que conclui $c = -10$ e o

$$\begin{aligned} y_v &= k \\ k &= -\frac{\Delta}{4a} \\ k &= -\frac{12^2 - 4\cdot(-2)\cdot(-10)}{4\cdot(-2)} \\ k &= 8. \end{aligned}$$

**11.** Toda função quadrática pode ser fatorada como

$$y = a\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2)$$

com $x_1$ e $x_2$ zeros da função. Como o eixo de simetria ($x_V$) está sobre o eixo $y$, podemos concluir que $x_V = 0$, ou melhor, $-\dfrac{b}{2a} = 0$, com $b = 0$, o que conclui $x_1 + x_2 = 0$. Além disso, como a distância entre as raízes é 4, podemos escrever $x_2 - x_1 = 4$ (supondo $x_2 > x_1$). Daí, vamos para

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 - x_1 &= 4, \end{aligned}$$

assim, $x_2 = 2$ e $x_1 = -2$. Por fim, como o valor mínimo é $-5$, ou seja $y_V = -5$, o par ordenado $(0,-5)$ pertence ao gráfico da função (é seu vértice) o que permite escrevermos

$$\begin{aligned} y &= a\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2) \\ y &= a\cdot(x - (-2))\cdot(x - 2) \\ y &= a\cdot(x + -2)\cdot(x - 2) \\ -5 &= a\cdot(0 + -2)\cdot(0 - 2) \\ a &= \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

**12.** Na função $y = 100x - 2x^2$ temos $a = -2$, $b = 100$, $c = 0$ e $\Delta = 100^2 - 4\cdot(-2)\cdot 0 = 10000$.

a) Ficamos com $y_V = -\dfrac{10000}{4\cdot(-2)} = 1250$ m.

b) Para a distância horizontal percorrida, vamos ter que calcular os zeros da função (e a distância entre eles). Sendo assim, façamos

$$\begin{aligned} x &= \frac{-100 \pm 100}{-4} \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 50. \end{aligned}$$

Por fim, a distância do local de lançamento ($x_1 = 0$) é igual a 50 metros.

**13.** (Adaptado do vestibular da ESPM SP − 2015) Temos que o lucro $L$ é a diferença do receita $R$ com o custo $C$ (com o intuito que fique positivo, e assim gerar lucro). Daí, podemos escrever que a receita é o produto do preço $x$ pela quantidade $n$ de unidade vendidas ($R = x\cdot n$) e o custo é o produto de valor de produção unitário (10 reais) pela quantidade produzida. Donde podemos estabelecer a função lucro como

$$\begin{aligned} L &= R - C \\ L &= x\cdot n - 10\cdot n \\ L &= x\cdot(100 - 2x) - 10\cdot(100 - 2x) \\ L &= (100 - 2x)\cdot(x - 10), \end{aligned}$$

aqui podemos determinar que $x_1 = 50$ e $x_2 = 10$ e o $x_V = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = 30$ reais.

**14.** (Adaptado do vestibular da IFPE − 2015) Sendo $x$ e $y$ as medidas dos lados do retângulo, então $x + y = 12$ e a área $S$ fica $S = xy$. Daí, podemos fazer $y = 12 - x$ e substituir na área ficando com

$$S = x\cdot(12 - x) = 12x - x^2.$$

Agora, o lado que garante a maior área fica igual a

$$\begin{aligned} x_V &= -\frac{b}{2a} \\ x_V &= -\frac{12}{2\cdot(-1)} \\ x_V &= 6, \end{aligned}$$

e o quadrilátero de maior área é um quadrado de lado 6 cm, cuja área é 36 cm$^2$.

**15.** (Adaptado do vestibular da UECE − 2015)
Fazendo as devidas substituições teremos que

$$\begin{aligned} a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c = 2 &\Leftrightarrow a+b+c=2 \quad (1)\\ a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c = 5 &\Leftrightarrow 4a+2b+c=5 \quad (2)\\ a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c = 4 &\Leftrightarrow 9a+3b+c=4. \quad (3)\end{aligned}$$

Ao proceder com as subtrações $(2)-(1)$ e $(3)-(1)$ ficaremos com

$$\begin{aligned} 3a+b &= 3\\ 8a+2b &= 2,\end{aligned}$$

sistema que resulta em $a=-2$, $b=9$ e $c=-5$. Portanto,

$$\begin{aligned} f(4) &= -2\cdot 4^2 + 9\cdot 4 - 5\\ f(4) &= -32+36-5=-1.\end{aligned}$$

**16.** (Adaptado do vestibular da UERN − 2015)
Do enunciado tiramos que $y_V = 9$. Sendo assim, ficamos com

$$\begin{aligned} y_V &= 9\\ -\frac{b^2-4\cdot 6\cdot 15}{4\cdot 6} &= 9\\ \frac{b^2-4\cdot 6\cdot 15}{4\cdot 6} &= -9\\ b^2 &= -9\cdot 4\cdot 6 + 4\cdot 6\cdot 15\\ b^2 &= 4\cdot 6\cdot 6\\ b &= 12.\end{aligned}$$

**17.** (Adaptado do vestibular da Unievangélica GO − 2015)
A altura máxima é dada pela fórmula da ordenada do vértice, $y_V = -\dfrac{4^2-4\cdot(-1)\cdot 0}{4\cdot(-1)} = 4$ unidades de comprimento.

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com