Módulo de Semelhança de Triângulos e Teorema de Tales

Relações Métricas no Triângulo Retângulo.

8° **ano/**9^a **série E.F.**

Semelhança de Triângulos e Teorema de Tales
Relações Métricas no Triângulo Retângulo.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo se seus catetos medem:

a) 3cm e 4cm.

b) 5cm e 12cm.

c) 1cm e 1cm.

d) 1/2cm e 3/2cm.

e) $\sqrt{3}$cm e $\sqrt{5}$cm.

Exercício 2. Determine x e y no triângulo da figura abaixo, sendo $x + y = 5$.

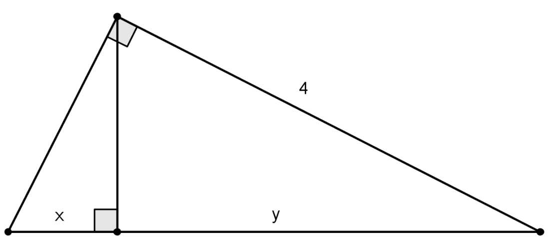

Figura 1

Exercício 3. Determine o valor de k na figura abaixo.

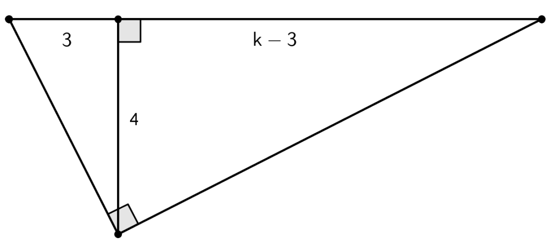

Figura 2

Exercício 4. Determine os valores de x, y, z, no triângulo abaixo.

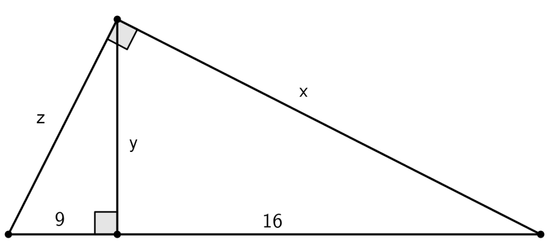

Figura 3

2 Exercícios de Fixação

Exercício 5. Determine a altura de um triângulo equilátero de lado medindo l.

Exercício 6. Determine o comprimento da diagonal d de um quadrado de lado l.

Exercício 7. Na figura, temos duas circunferências tangentes externamente de raios 3cm e 2cm, além de uma reta tangente às circunferências nos pontos A e B. Determine AB.

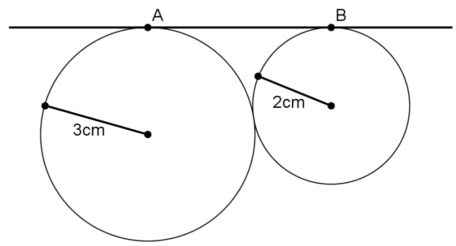

Figura 4

Exercício 8. Determine o perímetro do $\triangle ABC$ abaixo, sabendo que $AB = 7\sqrt{2}$.

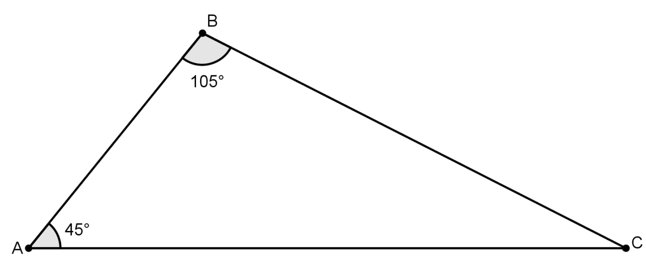

Figura 6

Exercício 9. Na figura abaixo, temos duas semicircunferências de centros O e O'. Um segmento perpendicular a $\overline{AB}$ intercepta as semicircunferências em D e E. Determine AE, sabendo que $AD = 7\sqrt{2}$.

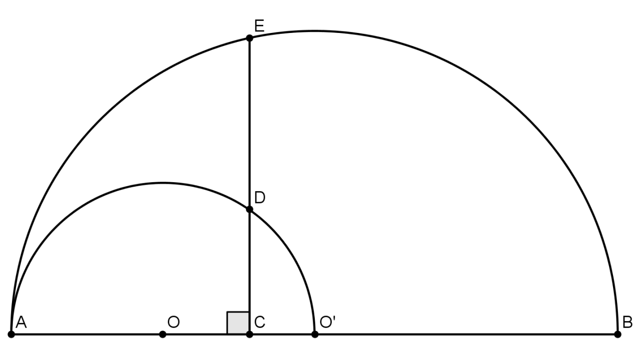

Figura 8

Exercício 10. Na figura abaixo temos três semicircunferências de centros em B, C e D, além de uma circunferência de centro O e tangente às semicircunferências. Sabendo que $AB = 4$cm, determine o raio x da circunferência.

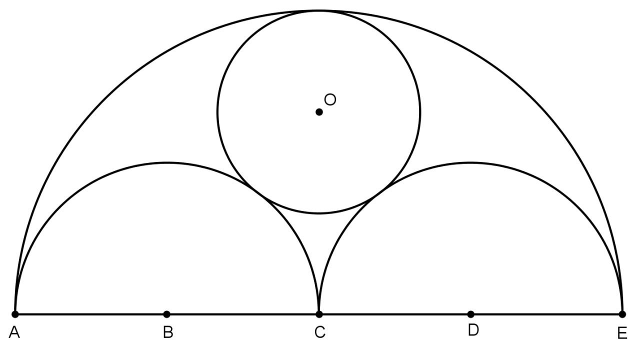

Figura 10

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 11. Na figura abaixo, os pontos A, C e F estão alinhados, $FC = CA = (1 + 2\sqrt{3})$, $EDCF$ é um quadrado e ABC é um triângulo equilátero. Determine CG.

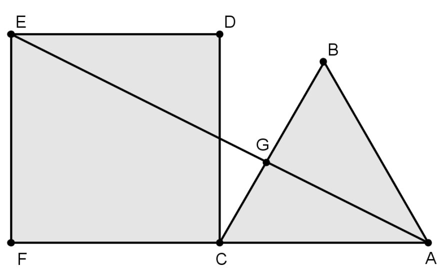

Figura 11

Exercício 12. No triângulo retângulo abaixo, $BC = 30$cm, $AC - AB = 6$cm e $\angle ABD \equiv \angle CBD$. Determine BD.

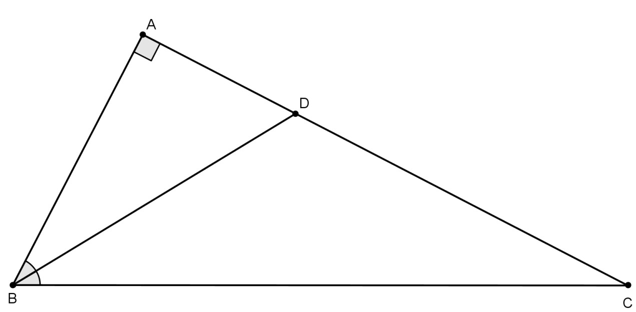

Figura 13

Exercício 13. Duas circunferências são tangentes internamente, como na figura. Os segmentos AB e CD são perpendiculares e o ponto O é o centro da circunferência maior. Os segmentos AP e CQ medem, respectivamente, 4 e 3 centímetros. Qual é a medida do raio do círculo menor?

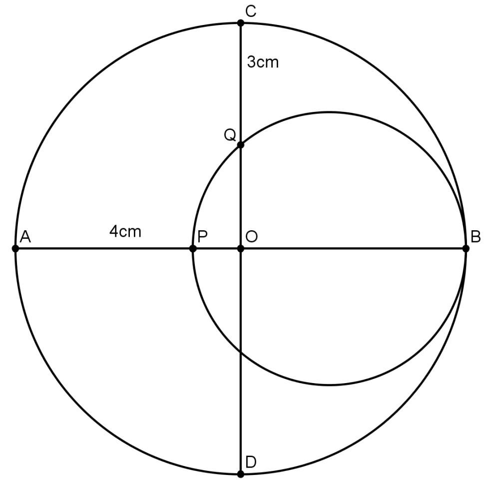

Figura 14

a) $2,25$cm.

b) $2,5$cm.

c) $2,75$cm.

d) 3cm.

e) $3,5$cm.

Exercício 14. A figura mostra quatro círculos de raio 1cm dentro de um triângulo. Os pontos marcados são os pontos de tangência. Qual é o comprimento do menor lado desse triângulo?

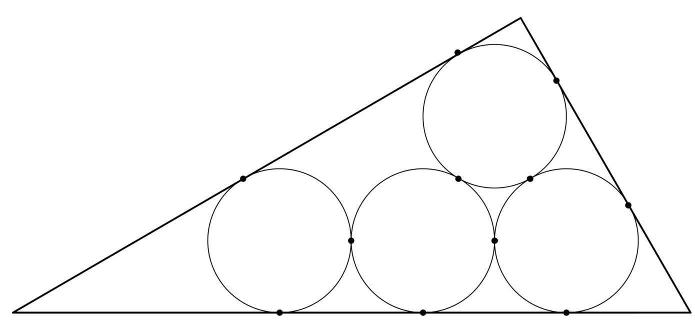

Figura 16

a) 4cm.

b) $3 + \sqrt{3}$cm.

c) 5cm.

d) $3\sqrt{3}$cm.

e) $2+2\sqrt{3}$cm.

Exercício 15. Seja ABC um triângulo retângulo em A. Seja D o ponto médio de $\overline{AC}$. Sabendo que $BD = 3DC$ e que $AC = 2$, a hipotenusa do triângulo é:

a) $\sqrt{7}$.

b) $2\sqrt{2}$.

c) 3.

d) $\sqrt{10}$.

e) $2\sqrt{3}$.

Exercício 16. No triângulo ABC, o comprimento dos lados AB, BC e CA, nessa ordem, são números inteiros e consecutivos. A altura relativa a BC divide este lado em dois segmentos de comprimentos m e n, como indicado. Quanto vale $m-n$?

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 6.

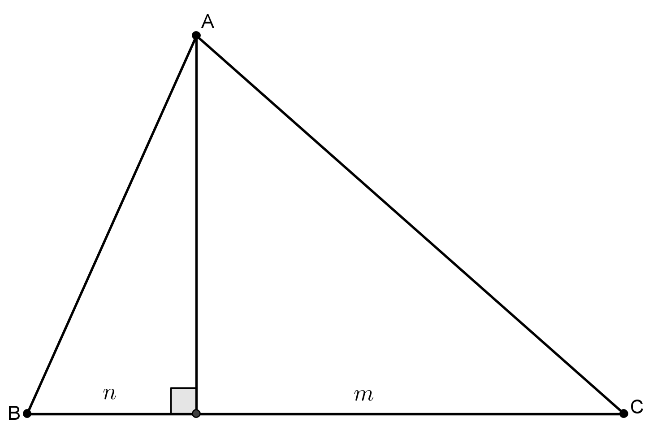

Figura 19

Exercício 17. O grande artilheiro Tornado está prestes a fazer o gol mais bonito de sua carreira. Ele está de frente para o gol e apenas o goleiro está entre ele e a trave. Ele está a x metros do goleiro que, por sua vez, se encontra a 2 metros da linha do gol, onde Tornado deseja que a bola caia após passar por cima do goleiro. Em um gol dessa magnitude, a trajetória da bola deve ser uma semicircunferência. Tornado sabe que a bola deve passar a exatamente 3 metros de altura do solo quando ela estiver acima do goleiro. Qual a distância de Tornado até o goleiro, ou seja, x, em metros?

a) 3.

b) 3,5.

c) 4.

d) 4,5.

e) 5.

Exercício 18. Na figura abaixo temos um semicírculo de raio 1 inscrito em um quadrado de modo que seu centro passe por uma das diagonais do quadrado. Qual é a área do quadrado?

a) $3/2+\sqrt{2}$.

b) $1+2\sqrt{2}$.

c) $5+\sqrt{2}/2$.

d) 4.

e) $2/3+\sqrt{2}$.

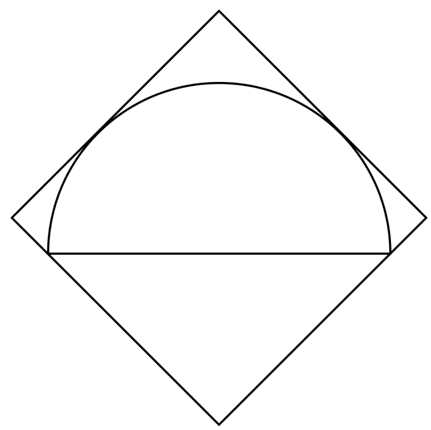

Figura 22

Respostas e Soluções.

1. Chamando a medida da hipotenusa de a, temos

a)

$$\begin{aligned} a^2 &= 3^2+4^2 \\ a^2 &= 25 \\ a &= 5. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} a^2 &= 5^2+12^2 \\ a^2 &= 169 \\ a &= 13. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} a^2 &= 1^2+1^2 \\ a^2 &= 2 \\ a &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} a^2 &= (1/2)^2+(3/2)^2 \\ a^2 &= 10/4 \\ a &= \sqrt{10}/2. \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} a^2 &= \sqrt{3}^2+\sqrt{5}^2 \\ a^2 &= 8 \\ a &= 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

2. Usando as relações métricas no triângulo retângulo, temos que $4^2 = 5 \cdot y$, segue que $y = 16/5$ e, por consequência, $x = 5 - 16/5 = 9/5$.

3. Aplicando as relações métricas no triângulo retângulo, temos $3(k-3) = 4^2$. Segue que $k = 25/3$.

4. Usando as relações métricas no triângulo retângulo, temos, inicialmente, $y^2 = 9 \cdot 16$, segue que $y = 12$. Aplicando agora o Teorema de Pitágoras, temos $x^2 = 16^2 + 12^2$ e $z^2 = 9^2 + 12^2$. Segue que $x = 20$ e $z = 15$.

5. (Extraído da Vídeo Aula) Inicialmente, traçamos a altura h deste triângulo e obtemos dois triângulos retângulos de hipotenusa medindo l e catetos medindo h e $l/2$. Basta agora aplicar o Teorema de Pitágoras.

$$\begin{aligned} h^2+(l/2)^2 &= l^2 \\ h^2 &= l^2-(l/2)^2 \\ h^2 &= 3l^2/4 \\ h &= \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

6. (Extraído da Vídeo Aula) Traçando uma diagonal no quadrado, dois triângulos retângulos se formam, nos quais seus catetos medem l e sua hipotenusa mede d. Basta agora aplicar o Teorema de Pitágoras.

$$\begin{aligned} d^2 &= l^2+l^2 \\ d^2 &= 2l^2 \\ d &= l\sqrt{2}. \end{aligned}$$

7. (Extraído da Vídeo Aula) Chamando os centros das circunferências de E e H e traçando os segmentos $\overline{AE}$, $\overline{BH}$, $\overline{HE}$ e $\overline{HC}$, sendo C o pé do segmento perpendicular a $\overline{AE}$, obtemos a seguinte figura.

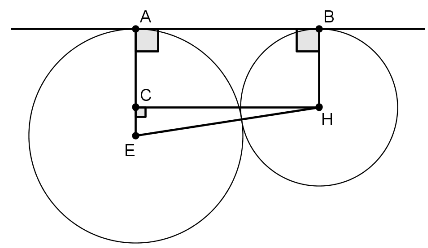

Figura 5

Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos

$$\begin{aligned} EC^2+HC^2 &= EH^2 \\ (AE-AC)^2+AB^2 &= EH^2 \\ 1+AB^2 &= 5^2 \\ AB &= \sqrt{24} \\ AB &= 2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

8. (Extraído da Vídeo Aula) Traçando a altura BD relativa ao lado $\overline{AC}$, podemos observar que $\angle ABD = 45^o$, segue que $AD = BD$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo $\triangle ABD$, obtemos $AD = BD = 7$. O triângulo $\triangle BCD$ possui os ângulos internos medindo $30°$, $60°$ e $90°$, ou seja, $BC = 2BD = 14$, pois o cateto menor é a metade da hipotenusa em triângulos com estas medidas de ângulos, conforme visto na Vídeo Aula. Aplicando agora o Teorema de Pitágoras no $\triangle BCD$, obtemos $DC = 7\sqrt{3}$. Por fim, o perímetro do triângulo $\triangle ABC = 7 + 7\sqrt{2} + 14 + 7\sqrt{3} = 7(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

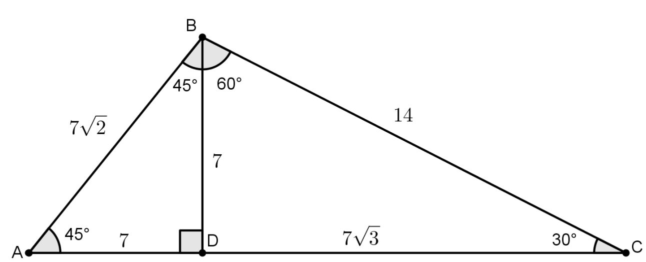

Figura 7

9. (Extraído da Vídeo Aula) Vamos fazer inicialmente $AE = x$, $O'C = y$ e $AO' = 2r$. Agora, construiremos dois triângulos retângulos utilizando os pontos A, B, D, E e O', conforme a figura abaixo.

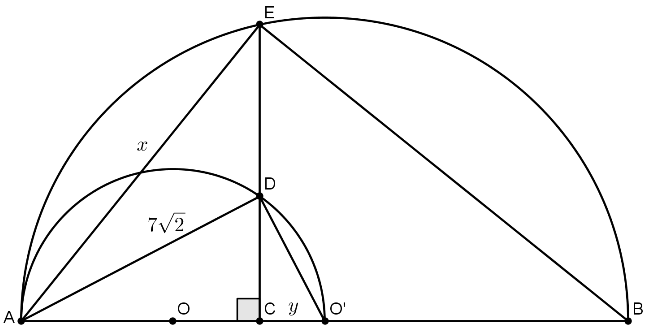

Figura 9

Usando as relações métricas no $\triangle AO'D$, temos $2r(2r - y) = (7\sqrt{2})^2 = 98$ (1). Fazendo o mesmo no $\triangle ABE$, temos $x^2 = 4r(2r - y)$ (2). Dividindo a equação (2) pela equação (1), obtemos $x^2 = 196$, segue que $x = 14$.

10. (Extraído da Vídeo Aula) Traçando $\overline{BO}$ e $\overline{DO}$, temos o triângulo isósceles $\triangle BDO$, pois $BO = DO = 4 + x$. Traçando agora $\overline{CO}$, obtemos dois triângulos retângulos, $\triangle BCO$ e $\triangle DCO$. Aplicando o Teorema de Pitágoras em um desses triângulos, chegamos a

$$\begin{aligned} (4+x)^2 &= 4^2 + (8-x)^2 \\ 16 + 8x + x^2 &= 16 + 64 - 16x + x^2 \\ 24x &= 64 \\ x &= 8/3cm. \end{aligned}$$

11. (Extraído da Vídeo Aula) Marcando o ponto H sobre $\overline{AC}$, tal que $\overline{GH}$ seja perpendicular a $\overline{AC}$. Se $\angle GCH = 60°$ e, por consequência, $\angle CGH = 30°$, então $CH = \dfrac{CG}{2} = \dfrac{x}{2}$ e $GH = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$. Temos ainda que $\triangle AGH$ e $\triangle AEF$ são semelhantes, o que implica que $\dfrac{GH}{AH} = \dfrac{EF}{AF}$, ou seja, $\dfrac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{1 + 2\sqrt{3} - \frac{x}{2}} = \dfrac{1}{2}$, segue que $CG = x = \dfrac{2 + 4\sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{3}} = 2$.

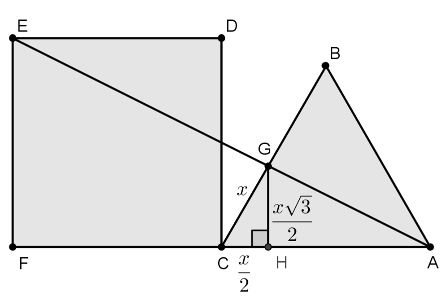

Figura 12

12. (Extraído da Vídeo Aula) Se $AB = y$, então $AC = y + 6$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no $\triangle ABC$, temos

$$\begin{aligned} (y+6)^2 + y^2 &= 30^2 \\ y^2 + 12y + 36 + y^2 &= 900 \\ y^2 + 6y - 432 &= 0 \\ y &= 18cm. \end{aligned}$$

Tomamos apenas o valor positivo de y. Chamando AD de z, então $CD = 24 - z$. Aplicando o Teorema da Bissetriz Interna, temos $\dfrac{z}{18} = \dfrac{24 - z}{30}$, segue que $z = 9$. Usando agora o Teorema de Pitágoras no triângulo ABD, chegamos a $BD = 9\sqrt{5}$cm.

13. (Extraído da OBMEP 2013) Sejam r e R, respectivamente, os raios das circunferências menor e maior, e S o centro da circunferência menor. Notamos primeiro que $2r = PB = AB - 4 = 2R - 4$, donde tiramos $R = r + 2$. No triângulo retângulo SOQ temos $SQ = r$, $OQ = OC - 3 = R - 3 = r - 1$ e $OS = OB - SB = R - r = 2$. O Teorema de Pitágoras nos dá $r^2 = (r-1)^2 + 2^2 = r^2 - 2r + 5$ e segue que $2r = 5$, ou seja, $r = 5/2 = 2,5$. Resposta B.

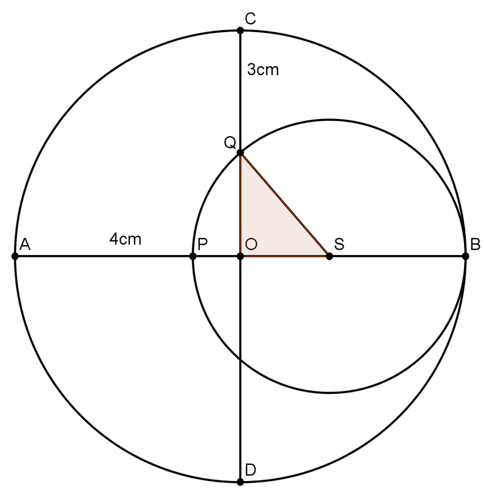

Figura 15

14. (Extraído da OBMEP)

Notamos primeiro que o triângulo PQR é equilátero de lado 2cm. Como o segmento RS também mede 2cm, o triângulo PRS é isósceles de base PS. $\angle PRS$ mede 120°, pois ele é externo ao triângulo PRQ, igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes, cada um medindo 60°. Logo cada um dos ângulos $\angle RSP$ e $\angle RPS$ mede 30°, e concluímos que o triângulo PQS é retângulo em P, com $\angle PQS = 60°$ e $\angle PSQ = 30°$. Logo o triângulo ABC é retângulo em A com $\angle ABC = 60°$ e $\angle ACB = 30°$, pois seus lados são paralelos aos do triângulo PQS. Além disso, seu menor lado é AB, oposto ao menor ângulo $\angle ACB = 30°$. Para calcular o comprimento do lado AB, basta calcular BT, pois claramente $AT = 3$cm. Notamos que o triângulo QBT é retângulo em T. Como BQ é bissetriz de $\angle ABC$, segue que $\angle TBQ = 30°$. Como $QT = 1$cm, segue que $BQ = 2$cm, e o Teorema de Pitágoras nos dá $BT = \sqrt{QB^2 - QT^2} = \sqrt{3}$, donde $AB = 3 + \sqrt{3}$. Resposta B.

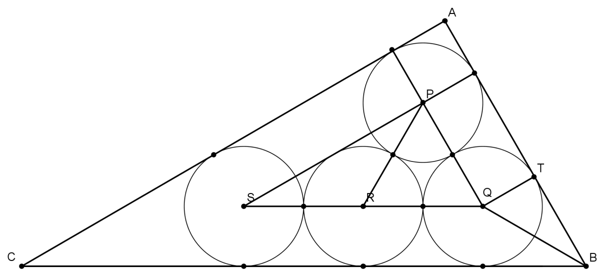

Figura 17

15. (Extraído da OBM 2013)

Como $AC = 2$, temos que $AD = DC = 1$. Pelo Teorema de Pitágoras no triângulo DAB, temos $AB^2 = 3^2 - 1^2 = 8$. Novamente pelo Teorema de Pitágora, agora no triângulo ABC, temos $BC^2 = 2^2 + AB^2 = 12$. Resposta E.

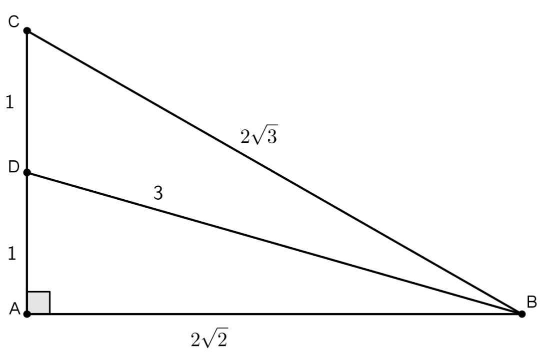

Figura 18

16. (Extraído da OBMEP) Colocando $AB = x$, temos $BC = x + 1$ e $AC = x + 2$. Seja $AH = h$ a altura relativa a BC. Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos AHB e AHC obtemos $n^2 + h^2 = x^2$ e $(x + 2)^2 = m^2 + h^2$. Segue que $h^2 = x^2 - n^2$ e $h^2 = (x + 2)^2 - m^2$, donde $(x + 2)^2 - m^2 = x^2 - n^2$, ou seja, $(x + 2)^2 - x^2 = m^2 - n^2$. Usando a identidade $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, obtemos então $(x + 2 - x)(x + 2 + x) = (m + n)(m - n)$. Como $m + n = x + 1$, segue que $2(2x + 2) = (m + n)(m - n)$, donde $4(x + 1) = (m - n)(x + 1)$. Como $x + 1 \neq 0$ podemos dividir ambos os membros desta última expressão por $x + 1$ e obtemos finalmente $m - n = 4$. Resposta D.

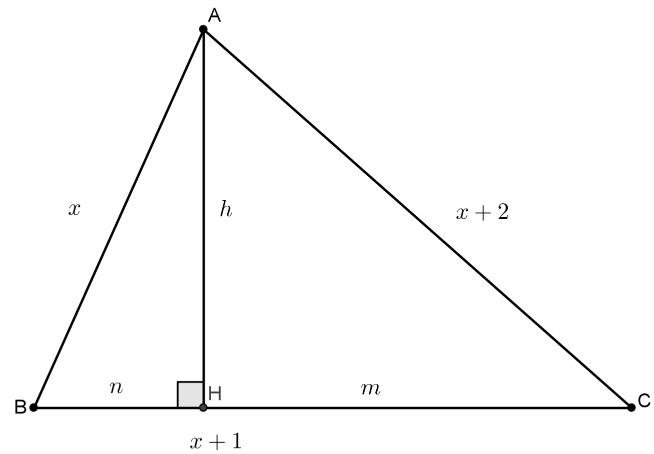

Figura 20

17. (Extraído da OBM 2012) Podemos desenhar uma figura que representa a situação do problema:

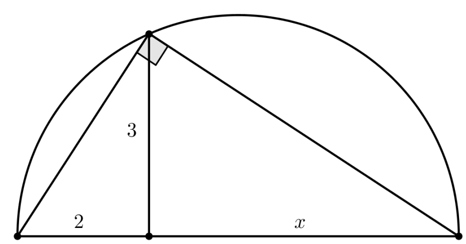

Figura 21

Sabemos que, em um triângulo retângulo, o quadrado da altura relativa ao ângulo reto é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa (Relações Métricas no Triângulo Retângulo). Portanto, $9 = 2x$, segue que $x = \dfrac{9}{2} = 4,5$. Reposta D.

18. (Extraído da OBM 2012) Seja O o centro da semicircunferência descrita no enunciado, P e Q os pontos como na figura e R o ponto de tangência da semicircunferência com o lado AB. Temos que $OR = 1$ e $OR \perp AB$. Como O está na diagonal AC, temos que $\angle OAB = 45°$. Assim, $OA = OR\sqrt{2} = \sqrt{2}$. Além disso, OC é altura e mediana relativa à hipotenusa no triângulo retângulo PQC, cuja hipotenusa é 2. Assim, $OC = 1$. Portanto, a diagonal do quadrado vale $1 = \sqrt{2}$ e daí sua área é $\dfrac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{2})^2 = \dfrac{3 + 2\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3}{2} + \sqrt{2}$. Resposta A.

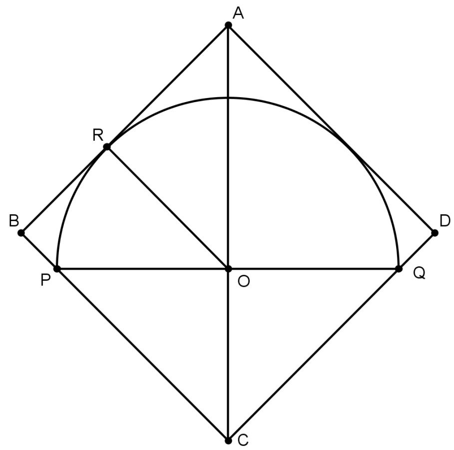

Figura 23

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com