Introdução ao Cálculo – Leis do Limite – Parte 02

Várias Técnicas

Introdução ao Cálculo

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Introdução ao Cálculo – Leis do Limite – Parte 02
Várias Técnicas

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Calcule $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-5x-14}{x+2}$.

Exercício 2. Calcule $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-5}{x^2-25}$.

Exercício 3. Calcule $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}$.

Exercício 4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $-8x+29 \geq f(x) \geq -x^2+2x+4$ para todo x entre 3 e 6. Empregando o Teorema do Confronto, encontre $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$.

Exercício 5. Para que valor de c, a função dada por $f(x) = x+1$ se $x \leq 9$ e $f(x) = 2x+c$ se $x > 9$ é contínua?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. Se $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^3-64}{x^2-16} = \dfrac{p}{q}$, com $\frac{p}{q}$ irredutível e $q > 0$, calcule o valor de $p+q$.

Exercício 7. Calcule $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}$.

Exercício 8. Calcular $L = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{15}-1}{x-1}$.

Exercício 9. Calcule $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{2^3x^3 - 3\cdot 2^4x^2 + 3\cdot 2^5x - 2^6}}{x-2}$.

Exercício 10. Seja $f(x) = \frac{(-1)^{\lfloor x \rfloor}}{x}$, onde $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro que é menor ou igual x (por exemplo, $\lfloor 17.4 \rfloor = 17$). Utilize o teorema do confronto para provar que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Exercício 11. Encontre $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 2x}{3x^2}$.

Sugestão: note que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{2x} = 1$.

Exercício 12. Sabe-se que, para todo real x, temos $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$. Usando isso, prove que $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$.

Exercício 13. Quanto é o limite de $\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+9}}$ quando $x \to 3$ pela esquerda?

Exercício 14. Calcule o limite lateral $\lim\limits_{x\to \pi/6^+} \dfrac{1}{\sin x - 1/2}$.

Exercício 15. Seja $\operatorname{sgn} t = 1$ se $t > 0$, $\operatorname{sgn} t = -1$ se $t < 0$ e $\operatorname{sgn} 0 = 0$. Essa é a chamada função "sinal". Calcule $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\operatorname{sgn} \sin(1000(x-2))}{x+1}$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 16. Sabendo que existe $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+ax^2-2x}{x^2+3x+2}$, encontre o valor de a.

Exercício 17. Seja a um número real arbitrário. Calcule $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^3-2x-a^3+2a}{x-a}$.

Exercício 18. Calcule $L = \lim_{x\to\infty} \frac{x-\lfloor x \rfloor}{\sqrt{x}}$.

Exercício 19. Se $|f(x)-7| \leq \operatorname{tg}|x|$ para x suficientemente pequeno, determine $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Exercício 20. Calcule $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{2x^2+3x+1}{|x+1|}$.

Exercício 21. Calcule $L = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{|\sin(10^x-0.1)|}{10^x-0.1}$.

Respostas e Soluções.

1. O numerador se fatora como $(x+2)(x-7)$, o que faz resultar em $\lim_{x\to -2} x-7 = -9$.

2. O denominador se fatora como $(x-5)(x+5)$, logo, para $x \neq 5$, essa fração é igual a $\frac{1}{x+5}$. Fazendo $x \to 5$, isso tende a $\frac{1}{10}$.

3. Multiplicando por $\frac{\sqrt{2x+5}+3}{\sqrt{2x+5}+3}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x+5}^2 - 3^2}{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)} &= \\
\lim_{x\to 2} \frac{2x-4}{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{2}{\sqrt{2x+5}+3} &= \\
\frac{2}{\sqrt{2\cdot 2+5}+3} &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

4. Sejam $g(x) = -8x+29$ e $h(x) = -x^2+2x+4$. Então, quando $x \to 5$, temos $g(x) \to g(5) = -11$ e $h(x) \to h(5) = -11$. Como $g(x) \geq f(x) \geq h(x)$ para x próximo de 5, pelo Teorema do Confronto, $\lim_{x\to 5} f(x) = -11$.

5. Temos $\lim_{x\to 9^-} x+1 = 10$ e $\lim_{x\to 9^+} 2x+c = 18+c$. Para que a função seja contínua, os dois limites devem ser iguais a $f(9)$, que é 10. Logo $18+c = 10$, ou seja, $c = -8$.

6. Temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x^2+4x+16)}{(x-4)(x+4)} &= \\
\lim_{x\to 4} \frac{x^2+4x+16}{x+4} &= \\
\frac{48}{8} &= \frac{6}{1},
\end{aligned}$$

logo $p+q = 6+1 = 7$.

7. Racionalizando, obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 64} \frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8} \frac{\sqrt[3]{x}^2+4\sqrt[3]{x}+16}{\sqrt[3]{x}^2+4\sqrt[3]{x}+16} \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+8} &= \\
\lim_{x\to 64} \frac{(x-64)(\sqrt{x}+8)}{(x-64)(\sqrt[3]{x}^2+4\sqrt[3]{x}+16)} &= \\
\frac{\sqrt{64}+8}{\sqrt[3]{64}^2+4\sqrt[3]{64}+16} &= \\
\frac{8+8}{16+16+16} &= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

8. Temos

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to 1} x^{14}+x^{13}+\ldots+x+1 \\
&= 1+1+\ldots+1+1 \\
&= 15
\end{aligned}$$

9. O radicando é $2^3(x^3 - 3\cdot 2x^2 + 3\cdot 2^2x - 2^3) = 2^3(x-2)^3$. Logo o que se pede é $\lim_{x\to 2} \frac{2(x-2)}{x-2} = 2$.

10. Sendo $g(x) = -\frac{1}{x}$ e $h(x) = \frac{1}{x}$, temos $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para x positivo. Como $g(x) \to 0$ e $h(x) \to 0$ quando $x \to \infty$, pelo teorema do confronto aplicado a f, g e h, o limite considerado é 0.

11. Temos

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 2x}{(2x)^2} \cdot \frac{4}{3} \\
&= \frac{4}{3}\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 \\
&= \frac{4}{3}1^2 \\
&= \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

12. Se $g(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ e $h(x) = 1$, então $g(x) \leq \cos x \leq h(x)$. Como $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = 1$, o resultado segue do teorema do confronto.

13. A raiz que aparece é $|x-3|$. Quando $x \to 3$ pela esquerda, temos $x-3 < 0$, logo $|x-3| = -(x-3)$. Em virtude disso, o limite pedido é $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{-(x-3)} = -1$.

14. Temos apenas que considerar os valores de x maiores que $\frac{\pi}{6}$ e próximos de $\frac{\pi}{6}$, e nesse caso $\sin x > 1/2$. Logo o denominador $\sin x - 1/2$ é positivo. Como esse denominador tende a 0 quando $x \to \frac{\pi}{6}$, o resultado é $+\infty$.

15. Quando x é suficientemente próximo de 2, temos $1000(x-2)$ muito pequeno. Se $x \to 2$ pela esquerda, esse é um número negativo. O seno de um número negativo suficientemente pequeno é negativo, logo $\operatorname{sgn} \sin(1000(x-2)) = -1$. Por outro lado, o denominador $x+1$ tende a 3. Logo o limite procurado é $-1/3$.

16. Quando $x \to -1$, temos $x^2+3x+2 \to (-1)^2 + 3(-1)+2 = 1-3+2 = 0$. Como o denominador se anula, o numerador deve se anular também, isto é, devemos ter $0 = (-1)^3 + a(-1)^2 - 2(-1) = -1+a+2 = a+1$, logo $a = -1$.

17. Podemos separar o limite em

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{-2x+2a}{x-a} &= \\
\lim_{x\to a}(x^2+ax+a^2) + \lim_{x\to a} -2 &= 3a^2-2
\end{aligned}$$

18. A diferença $x - \lfloor x \rfloor$ está sempre entre 0 e 1. Portanto, a expressão cujo limite é pedido varia entre 0 e $1/\sqrt{x}$. Como $\lim_{x\to\infty} 1/\sqrt{x} = 0$, pelo teorema do confronto, o limite L é nulo.

19. Sejam $g(x) = 0$ e $h(x) = \text{tg}\,|x|$. Como $g(x) \to 0$ e $h(x) \to 0$ quando $x \to 0$ e $g(x) \leq |f(x) - 7| \leq h(x)$, podemos aplicar o teorema do confronto. Obtemos $\lim\limits_{x\to 0} |f(x) - 7| = 0$, donde $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 7$.

20. O denominador fica positivo, pois $x > -1$ quando $x \to -1^+$, logo obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1^+} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x + 1} &= \\ \lim_{x\to -1^+} 2x + 1 &= -1 \end{aligned}$$

21. Como a função 10^x é crescente, temos $10^x < 10^{-1} = 0.1$ para $x < -1$. Logo $10^x - 0.1$ é um número real negativo que tende a 0 quando $x \to -1$ pela esquerda. Então $\sin(10^x - 0,1) < 0$ para $x \to -1^-$. Logo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to -1^-} \frac{-\sin(10^x - 0.1)}{10^x - 0.1} \\ &= -\lim_{x\to -1^-} \frac{\sin(10^x - 0.1)}{10^x - 0.1}. \end{aligned}$$

Podemos substituir $y = 10^x - 0.1$. Então temos $y \to 0$ e $L = -\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin y}{y} = -1$.

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com