Trigonometria I

Mais Linhas Trigonométricas

2° ano E.M.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

Portal da Matemática
OBMEP

Trigonometria I
Mais Linhas Trigonométricas

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Quais são os quadrantes nos quais o valor da tangente é negativa?

a) 1^o e 2^o.

b) 1^o e 3^o.

c) 2^o e 3^o.

d) 2^o e 4^o.

e) 3^o e 4^o.

Exercício 2. Seja um arco α do círculo trigonométrico tal que $\operatorname{sen}\alpha < 0$ e $\operatorname{tg}\alpha > 0$, então α pertence a qual quadrante?

a) 1^o.

b) 2^o.

c) 3^o.

d) 4^o.

e) nenhum dos quadrantes.

Exercício 3. A $\operatorname{cossec} 30^o$ é igual a:

a) 1.

b) 2.

c) -1.

d) -2.

e) 0.

Exercício 4. Qual das alternativas abaixo apresenta uma identidade trigonométrica válida qualquer que seja o valor de $x \neq k\pi$, sendo $k \in \mathbb{Z}$?

a) $\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = 1$.

b) $\operatorname{cotg}^2 x + 1 = \operatorname{cossec}^2 x$.

c) $1 - \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$.

d) $\operatorname{cossec}^2 x + 1 = \operatorname{cotg}^2 x$.

e) $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cossec}^2 x = 1$.

Exercício 5. Seja um arco β pertencente ao 2^o quadrante, tal que $\cos\beta = -\dfrac{1}{3}$. A tangente de β é:

a) $2\sqrt{2}$.

b) $\sqrt{6}$.

c) $2\sqrt{3}$.

d) $3\sqrt{5}$.

e) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Exercício 6. Represente no ciclo trigonométrico as extremidades dos arcos α, sendo:

a) $\sec\alpha = 2$, $\alpha \in 1^o$ quadrante.

b) $\operatorname{cossec}\alpha = \dfrac{3}{2}$, $\alpha \in 2^o$ quadrante.

c) $\operatorname{cotg}\alpha = -2$, $\alpha \in 4^o$ quadrante.

Exercício 7. Se $\cos\beta = \dfrac{1}{4}$ e $\beta \in 4^o$ quadrante, determine:

a) $\sec\beta$.

b) $\operatorname{sen}\beta$.

c) $\operatorname{cotg}\beta$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 8. Se $\sec x - \operatorname{tg} x = 2$, então quanto vale $\sec x + \operatorname{tg} x$?

Exercício 9. Utilize o sistema para determinar a que quadrante α pertence.

$$\begin{cases} \sec\alpha + \operatorname{tg}\alpha & = & \dfrac{3}{2} \\ \sec\alpha - \operatorname{tg}\alpha & = & \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Exercício 10. Se o $\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, então a $\sec x$ é igual a:

a) $\dfrac{8}{5+\sqrt{5}}$.

b) $\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$.

c) $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}$.

d) $\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}$.

Exercício 11. Determine $\operatorname{tg} x$, sendo $\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x \cos x = 2$.

Exercício 12. Se $\cos x = -\dfrac{12}{13}$ e $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, então $\operatorname{tg} x$ é igual a:

a) $-\dfrac{5}{13}$.

b) $-\dfrac{5}{12}$.

c) $\dfrac{5}{13}$.

d) $\dfrac{5}{12}$.

e) $0,334$.

Exercício 13. Se $\cos\alpha + \sec(-\alpha) = k$, sendo k um número real, determine $\cos^2\alpha + \sec^2\alpha$ em função de k.

Exercício 14. Represente no círculo trigonométrico as extremidades dos arcos α tal que:

a) $\sec\alpha = \sqrt{2}$.

b) $\operatorname{cossec}\alpha = -\sqrt{3}$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 15. Se $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{3}$ e $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$, então o valor de $\dfrac{\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{cossec} x}$ é:

a) $-\dfrac{1}{2}$.

b) -1.

c) $\dfrac{1}{2}$.

d) 1.

e) 0.

Exercício 16. Se $\operatorname{tg} x = \sqrt{5}$, então $\operatorname{sen}^2 x$ é igual a:

a) $\dfrac{1}{6}$.

b) $\dfrac{1}{5}$.

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

d) $\dfrac{3}{5}$.

e) $\dfrac{5}{6}$.

Exercício 17. Se $\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha > 0$, $\operatorname{tg}\alpha \cdot \sec\alpha < 0$ e $0 < \alpha < 2\pi$, então:

a) $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

b) $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

c) $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

d) $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

e) não há α que satisfaça às condições propostas.

Exercício 18. Em $0 \leq x \leq 2\pi$, a expressão $y = \dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{cotg} x}$ é tal que:

a) $y > 0$.

b) $y < 0$, se $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) $y > 0$, se $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) $y < 0$.

e) N.d.a.

Exercício 19. Determine todos os valores $\alpha = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, tais que a equação (em x) $x^4 - 2\sqrt[4]{3}x^2 + \tan\alpha = 0$ admita apenas raízes reais simples.

Exercício 20. Sabe-se que x é um número real pertencente ao intervalo $]0, 2[$ e que o triplo de sua secante, somado ao dobro de sua tangente, é igual a 3. Então, o cosseno de x é igual a:

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

b) $\dfrac{2}{7}$.

c) $\dfrac{5}{13}$.

d) $\dfrac{15}{26}$.

e) $\dfrac{13}{49}$.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com

Respostas e Soluções.

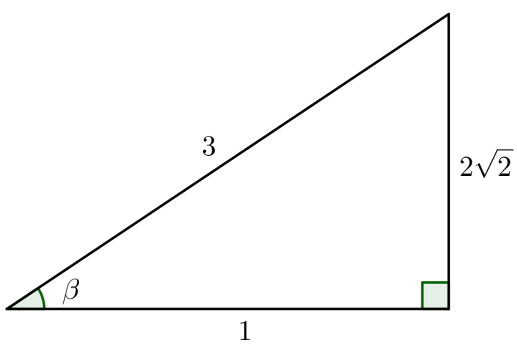
1. D.

2. C.

3. $\operatorname{cossec} 30^o = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 30^o} = 2$. Resposta B.

4. B.

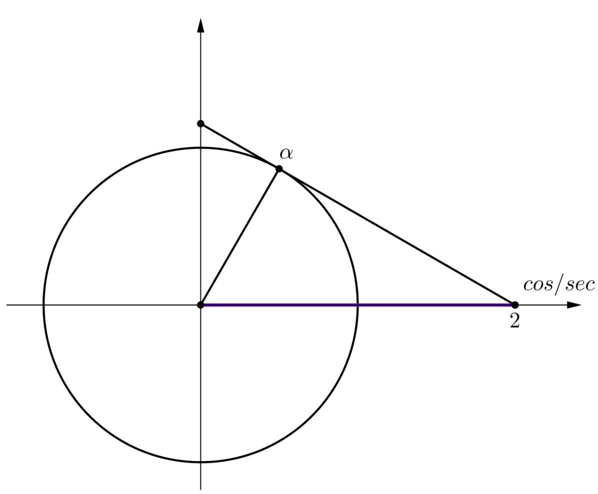
5. Usando o triângulo retângulo abaixo como apoio e usando o valor do cosseno em módulo, temos que, se $|\cos\beta| = \dfrac{1}{3}$, então podemos utilizar medidas 1 e 3, respectivamente, para o cateto adjacente, em relação ao ângulo β, e hipotenusa.



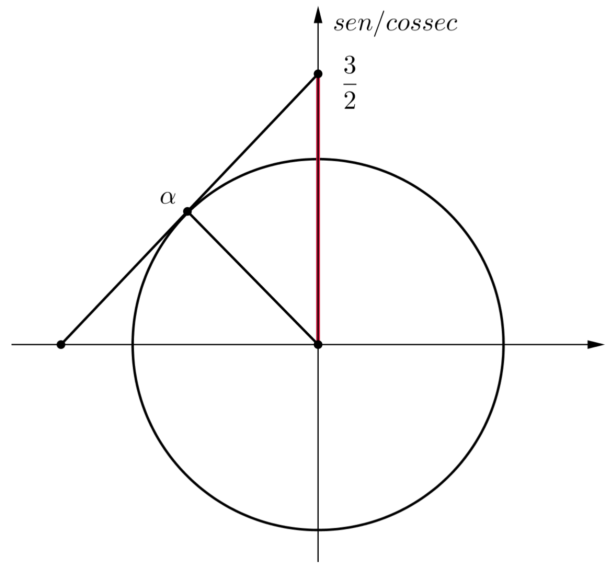
Utilizando o Teorema de Pitágoras encontramos que o cateto oposto é $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Portanto, $\operatorname{tg}\beta = 2\sqrt{2}$. Resposta A.

6.

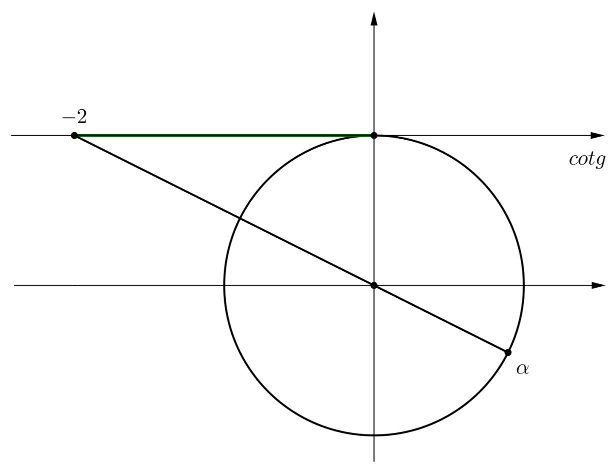
a) Temos:



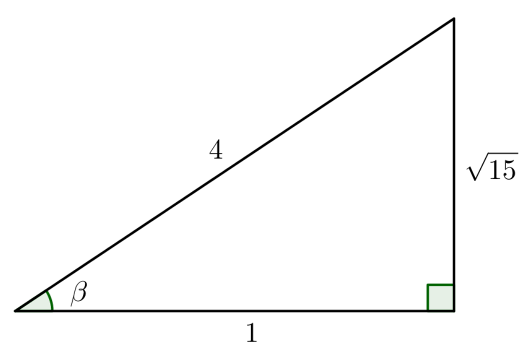
b) Temos:



c) Temos:



7. Usando o triângulo retângulo abaixo como apoio, temos que, se $\cos\beta = \dfrac{1}{4}$, então podemos utilizar medidas 1 e 4, respectivamente, para o cateto adjacente, em relação ao ângulo β, e hipotenusa.



Utilizando o Teorema de Pitágoras encontramos que o cateto oposto é $\sqrt{15}$. Temos então:

a) $\sec\beta = \dfrac{1}{\cos\beta} = 4$.

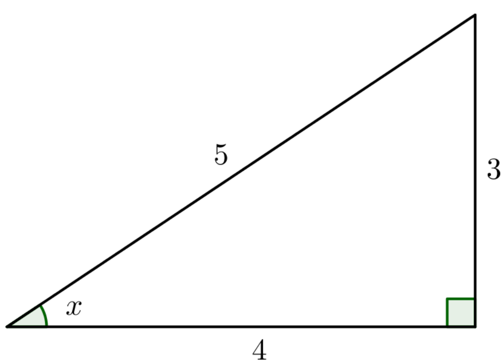
b) $\operatorname{sen}\beta = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

c) $\operatorname{cotg}\beta = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\beta} = \dfrac{1}{-\sqrt{15}} = -\dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

8. Sabemos que $1+\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$, então:

$$\begin{aligned}
\sec x - tgx &= 2\\
\sec x &= 2+\operatorname{tg} x\\
(\sec x)^2 &= (2+\operatorname{tg} x)^2\\
1+(\operatorname{tg} x)^2 &= 4+4\operatorname{tg} x+(\operatorname{tg} x)^2\\
\operatorname{tg} x &= -\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

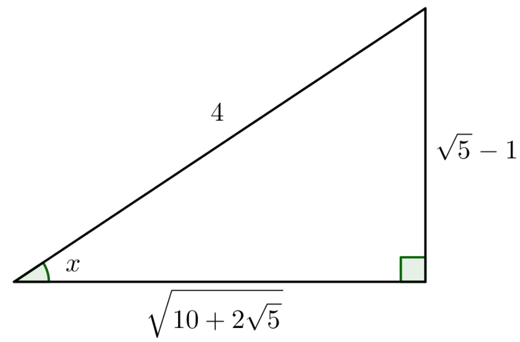
Usando o triângulo retângulo abaixo como apoio e usando o valor da tangente em módulo, temos que, se $|\operatorname{tg} x| = \dfrac{3}{4}$, então podemos utilizar medidas 3 e 4, respectivamente, para o cateto oposto e cateto adjacente, em relação ao ângulo x.



Utilizando o Teorema de Pitágoras encontramos que a hipotenusa é 5. Portanto, $\sec x = \dfrac{5}{4}$ (o valor é positivo para que a expressão do enunciado seja igual a 2). Portanto, $\sec x + tgx = \dfrac{5}{4} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{2}$.

9. (Extraído da Vídeo Aula) Somando as equações do sistema, temos $\sec\alpha = \dfrac{13}{12} > 0$ e, consequentemente, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{5}{12} > 0$. Portanto, α pertence ao 1^o quadrante.

10.
Usando o triângulo retângulo abaixo como apoio, temos que, se $\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, então podemos utilizar medidas $\sqrt{5}-1$ e 4, respectivamente, para o cateto oposto, em relação ao ângulo x, e hipotenusa.



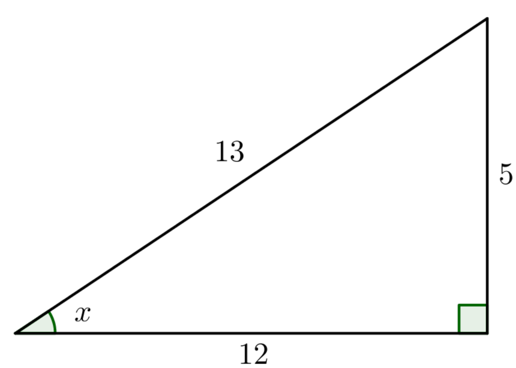
Utilizando o Teorema de Pitágoras encontramos que o cateto adjacente é $\sqrt{10+2\sqrt{5}}$. Portanto, $\sec x = \dfrac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}$. Resposta C.

11. (Extraído da Vídeo Aula) Dividindo toda a equação por $\cos^2 x$ e sabendo que $1+\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$, temos:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{sen} x)^2 - 3\operatorname{sen} x\cos x &= 2\\
\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^2 - \frac{3\operatorname{sen} x\cos x}{(\cos x)^2} &= \frac{2}{(\cos x)^2}\\
(\operatorname{tg} x)^2 - 3\operatorname{tg} x &= 2(\sec x)^2\\
(\operatorname{tg} x)^2 - 3\operatorname{tg} x &= 2(1+(\operatorname{tg} x)^2)\\
(\operatorname{tg} x)^2 + 3\operatorname{tg} x + 2 &= 0.
\end{aligned}$$

Resolvendo a equação, chegamos a $\operatorname{tg} x = -1$ ou $\operatorname{tg} x = -2$.

12.
Usando o triângulo retângulo abaixo como apoio, considerando o módulo do cosseno, temos que, se $|\cos x| = \dfrac{12}{13}$, então podemos utilizar medidas 12 e 13, respectivamente, para o cateto adjacente, em relação ao ângulo x, e hipotenusa.



Utilizando o Teorema de Pitágoras encontramos que o cateto oposto é 5. Portanto, como x é um ângulo do 3^o quadrante, $\operatorname{tg} x = \dfrac{5}{12}$. Resposta D.

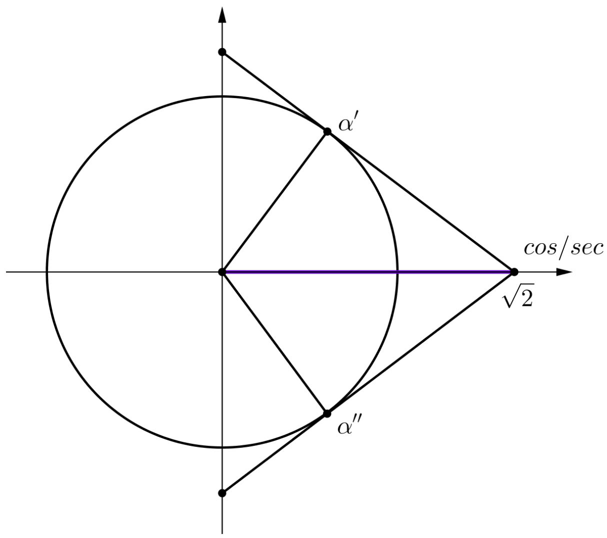
13. Como a secante é o inverso do cosseno, então $\sec(-\alpha) =$

$\sec\alpha$ e, consequentemente, $\cos\alpha + \sec\alpha = k$. Temos então:

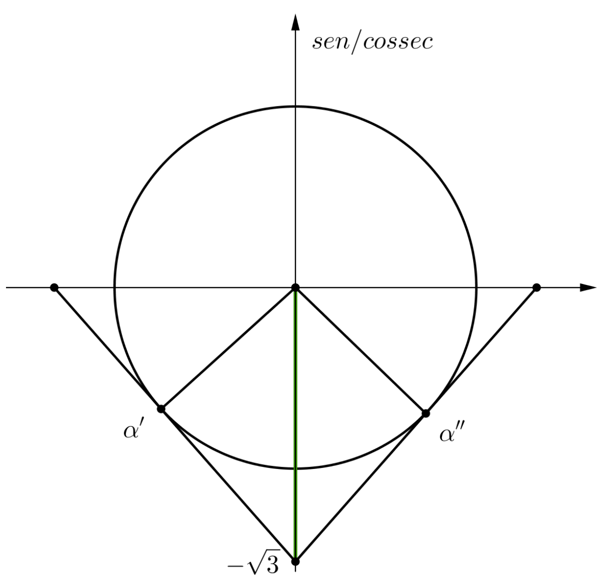
$$\begin{aligned}
\cos\alpha + \sec\alpha &= k\\
(\cos\alpha + \sec\alpha)^2 &= k^2\\
(\cos\alpha)^2 + 2\cos\alpha\sec\alpha + (\sec\alpha)^2 &= k^2\\
(\cos\alpha)^2 + 2\cos\alpha\frac{1}{\cos\alpha} + (\sec\alpha)^2 &= k^2\\
(\cos\alpha)^2 + 2 + (\sec\alpha)^2 &= k^2\\
(\cos\alpha)^2 + (\sec\alpha)^2 &= k^2 - 2.
\end{aligned}$$

14.

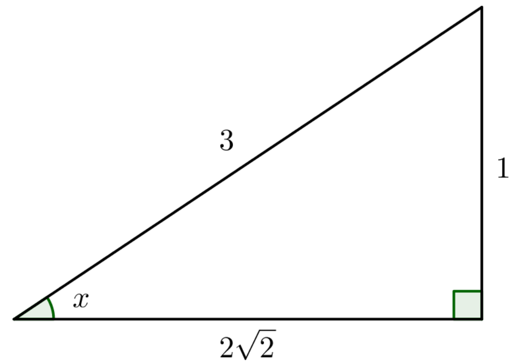
a) Como a secante é positiva, temos arcos no 1^o e 4^o quadrantes:



b) Como a cossecante é negativa, temos arcos no 3^o e 4^o quadrantes:



15. (Extraído do IFCE - 2016)
Usando o triângulo retângulo abaixo como apoio, temos que, se $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{3}$, então podemos utilizar medidas 1 e 3, respectivamente, para o cateto oposto, em relação ao ângulo x, e hipotenusa.

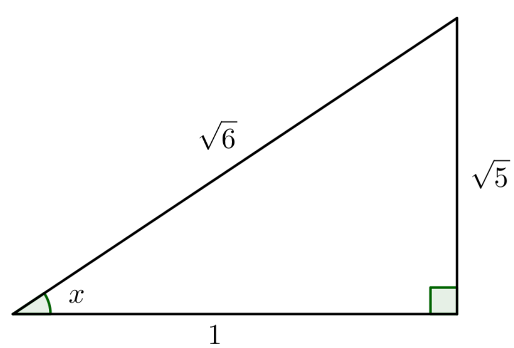


Utilizando o Teorema de Pitágoras encontramos que o cateto adjacente é $2\sqrt{2}$. Lembrando que x é um ângulo do 2^o quadrante, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{(\sec x)^2 - (\operatorname{tg} x)^2}{1 - \operatorname{cossec} x} &=\\
\frac{\left(-\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \left(-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}{1-3} &=\\
\frac{\dfrac{9}{8} - \dfrac{1}{8}}{-2} &= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Resposta A.

16. (Extraído da Cesgranrio) Usando o triângulo retângulo abaixo como apoio, temos que, se $\operatorname{tg} x = \sqrt{5}$, então podemos utilizar medidas $\sqrt{5}$ e 1, respectivamente, para o cateto oposto e o cateto adjacente, em relação ao ângulo x.



Utilizando o Teorema de Pitágoras encontramos que a hipotenusa é $\sqrt{6}$. Portanto, $\operatorname{sen}^2 x = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right)^2 = \dfrac{5}{6}$. Resposta E.

17. (Extraído da Fatec - SP) Se $\operatorname{tg}\alpha \cdot \sec\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \cdot \dfrac{1}{\cos\alpha} < 0$ e $\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha > 0$, então $\cos\alpha < 0$ e, consequentemente, $\operatorname{sen}\alpha < 0$. Portanto, α é um arco do 3^o quadrante. Resposta C.

18. (Extraído da Mackenzie-SP)

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{cotg} x} &= \\
\frac{\operatorname{sen} x + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\cos x + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} &= \\
\frac{\dfrac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x}}{\dfrac{\cos x \cdot \operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x}} &= \\
\frac{\dfrac{\operatorname{sen} x(\cos x + 1)}{\cos x}}{\dfrac{\cos x(\operatorname{sen} x + 1)}{\operatorname{sen} x}} &= \\
\frac{(\operatorname{sen} x)^2(\cos x + 1)}{(\cos x)^2(\operatorname{sen} x + 1)}&.
\end{aligned}$$

No resultado obtido, como $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ são denominadores, devem ser diferentes de zero e, consequentemente, todos os termos devem ser positivos. Sendo assim, $y > 0$, se $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Resposta C.

19. (Extraído do ITA) Fazendo $x^2 = y$, temos $y^2 - 2\sqrt[4]{3}y + \operatorname{tg} \alpha = 0$, que deve admitir duas raízes reais, distintas e não negativas, ou seja, $(2\sqrt[4]{3})^2 - 4 \operatorname{tg} \alpha > 0$ e $\operatorname{tg} \alpha \geq 0$, segue que $0 \leq \operatorname{tg} \alpha < \sqrt{3}$, donde $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{3}$.

20. (Extraído do ITA) Temos:

$$\begin{aligned}
3 \sec x + 2 \operatorname{tg} x &= 3 \\
\frac{3}{\cos x} + \frac{2 \operatorname{sen} x}{\cos x} &= 3 \\
3 + 2 \operatorname{sen} x &= 3 \cos x \\
2 \operatorname{sen} x &= 3 \cos x - 3 \\
4(\operatorname{sen} x)^2 &= 9(\cos x)^2 - 18 \cos x + 9 \\
4(1 - (\cos x)^2) &= 9(\cos x)^2 - 18 \cos x + 9 \\
13(\cos x)^2 - 18 \cos x + 5 &= 0 \\
\cos x &= \frac{18 \pm 8}{26}.
\end{aligned}$$

Chegamos a dois valores para $\cos x$, mas como $x \neq 0$, pelo enunciado, então $\cos x = \frac{5}{13}$. Resposta C.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com