Algoritmo de Euclides Estendido, Relação de Bézout e Equações Diofantinas

Equações Diofantinas

Tópicos Adicionais

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Tópicos Adicionais
Equações Diofantinas

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine todas as soluções inteiras da equação $2x + 3y = 5$.

Exercício 2. Determine todas as soluções inteiras da equação $5x + 3y = 7$.

Exercício 3. Determine a solução geral, em inteiros, da equação $5x + 9y = 1$.

Exercício 4. Sabendo que a solução geral da equação $ax + by = 1$ é

$$(x, y) = (1 + 3k, -2 - 7k) \; k \in \mathbb{Z},$$

determine os valores de a e b.

Exercício 5. Encontre todas as soluções inteiras da equação $21x + 48y = 6$

Exercício 6. Resolva nos inteiros a equação

$$2x + 3y + 5z = 11.$$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 7. Em cada um dos seguintes itens, determine se existem soluções em inteiros para a equação dada

i) $3x + 6y = 10$

ii) $5x + 10y = 20$

iii) $8x + 12y = 6$

Exercício 8. Encontre o número de pares de inteiros não negativos (x, y) tais que

(a) $x + y = 20$.

(b) $x + 2y = 20$.

(c) $x + 3y = 20$.

Exercício 9. Determine o número de pares de inteiros não negativos (x, y) tais que

$$x + 2y \leq 100.$$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 10. Seja n um inteiro positivo. Se a equação $2x + 2y + z = n$ tem 28 soluções em inteiros positivos x, y e z, determine os possíveis valores de n.
A) 14 ou 15 B) 15 ou 16 C) 16 ou 17
D) 17 ou 18 E) 18 ou 19.

Exercício 11. Em uma loja de chocolates, existem caixas com 8, 9 e 10 chocolates. Observe que algumas quantidades de chocolates não podem ser compradas exatamente, como por exemplo 12 chocolates. Qual é a maior quantidade de unidades de chocolates que não podemos comprar exatamente nessa loja?

Exercício 12. O ano de 2016 é sabadoso, pois há cinco meses com cinco sábados. Qual será o próximo ano sabadoso?

Exercício 13. (Extraído da OBM 2011) Quantos são os pares ordenados (a, b), com a e b inteiros positivos, tais que

$$a + b + mdc(a, b) = 33?$$

Exercício 14. Encontre todas as soluções em inteiros da equação

$$25x^2 - 9y^2 = 1.$$

Exercício 15. Encontre todos os pares de inteiros (x, y) tais que $1 + 1996x + 1998y = xy$.

Exercício 16. Encontre todas as soluções inteiras do sistema

$$\begin{cases} xz - 2yt &= 3 \\ xt + yz &= 1. \end{cases}$$

Respostas e Soluções.

1. Por paridade, $3y$ é ímpar, donde $y = 2k+1$ para algum inteiro k. Daí,

$$x = \frac{5-3(2k+1)}{2} = 1-3k,$$

e consequentemente todas as soluções da equação são da forma $(x,y) = (1-3k, 2k+1)$.

2. Dentre os possíveis restos na divisão por 3, a saber $\{0,1,2\}$, o único que faz $5x$ deixar o mesmo resto que 7 é o resto 2. Sendo assim, x é da forma $3k+2$ e

$$y = \frac{7-5(3k+2)}{3} = -1-5k,$$

consequentemente, todas as soluções da equação são da forma $(x,y) = (3k+2, -1-5k)$.

3. Usando o Algoritmo de Euclides Estendido, podemos encontrar a solução particular $(x,y) = (2,-1)$. Daí, a solução geral da equação é dada por

$$(x,y) = (2+9k, -1-5k).\ k \in \mathbb{Z}.$$

4. Para todo inteiro k, devemos ter

$$\begin{aligned} a(1+3k)+b(-2-7k) &= 1 \\ k(3a-7b)+(a-2b-1) &= 0 \end{aligned}$$

Como a equação anterior deve ser satisfeita para todo inteiro k, devemos ter

$$\begin{aligned} 3a-7b &= 0 \\ a-2b-1 &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema anterior, encontramos $a = 7$ e $b = 3$.

5. A equação é equivalente a $7x+16y = 2$. Uma solução é $(x,y) = (-2,1)$. Todas as soluções são da forma:

$$(x_k, y_k) = (-2+16k, 1-7k).$$

6. Podemos transformar esse problema isolando qualquer uma das variáveis no problema que já sabemos resolver. Por exemplo, podemos resolver $2x+3y = 11-5z$. Supondo z fixo, podemos encontrar a solução particular $(x,y) = (4-z, 1-z)$. Assim, todas as soluções são da forma:

$$(x,y) = (4-z+3k, 1-z-2k),$$

ou seja, as soluções da equação original são da forma $(x,y,z) = (4-z+3k, 1-z-2k, z)$ com k e z inteiros.

7.

(a) Não, pois $mdc(3,6) \nmid 10$.

(b) Sim, pois $mdc(5,10) \mid 20$.

(c) Não, pois $mdc(8,12) \nmid 6$.

8.

(a) Podemos listar explicitamente todas as soluções:

$$(x,y) = (0,20), (1,19), \ldots, (20,0)$$

Na lista anterior, temos 21 pares de soluções.

(b) Como 20 e $2y$ são números pares, x também deve ser par, ou seja, $x = 2m$. Assim, basta resolvermos a equação

$$\begin{aligned} 2m+2y &= 20 \\ m+y &= 10 \end{aligned}$$

Podemos agora proceder como no item anterior e listar todas as soluções:

$$(m,y) = (0,10), (1,9), \ldots, (10,0).$$

Portanto, existem 11 soluções.

(c) Como x e 20 devem deixar o mesmo resto na divisão por 3, devemos ter $x = 3k+2$, com $k \geq 0$. Daí,

$$\begin{aligned} x+3y &= 20 \\ (3k+2)+3y &= 20 \\ k+y &= 6 \end{aligned}$$

Basta agora listar as soluções da equação anterior:

$$(k,y) = (0,6), (1,5), \ldots, (6,0).$$

Portanto, existem 7 soluções.

9. Como $2y$ e 100 são números pares, devemos ter $x = 2m$, daí

$$\begin{aligned} x+2y &\leq 100 \\ 2m+2y &\leq 100 \\ m+y &\leq 50. \end{aligned}$$

Fixado um inteiro n, com $0 \leq n \leq 50$, a equação

$$m+y = n$$

admite as seguintes $n+1$ soluções em inteiros não negativos

$$(m,y) = (0,n), (1,n-1), \ldots, (n,0).$$

Portanto, o número de soluções em inteiros não negativos da desigualdade é

$$1+2+\ldots+51 = 1326.$$

10. (Extraído da AMC 1989) Perceba inicialmente que se x e y estão definidos, só existe uma possível escolha para z e, além disso, z e n possuem a mesma paridade. Consideremos os seguintes casos:

i) O número n é par, ou seja, $n = 2i$. Assim, devemos ter $z = 2j$ e

$$\begin{aligned} 2x+2y+z &= n \\ x+y &= i-j. \end{aligned}$$

Temos então as seguintes $i-j-1$ possibilidades para o par (x,y):

$$(1, i-j-1), (2, i-j-2), \ldots, (i-j-1, 1).$$

Como devemos ter $1 \leq i-j-1 \leq \dfrac{n-4}{2}$, fixado n par, temos

$$(n-4)/2 + (n-3)/2 + \ldots + 1 = \frac{(n-4)(n-2)}{8}$$

soluções.

ii) O número n é ímpar, ou seja, $n = 2i+1$. Asssim, devemos ter $z = 2j+1$ e

$$\begin{aligned} 2x + 2y + z &= n \\ x + y &= i - j. \end{aligned}$$

Temos então as seguintes $i-j-1$ possibilidades para o par (x,y):

$$(1, i-j-1), (2, i-j-2), \ldots, (i-j-1, 1).$$

De modo semelhante ao caso anterior, devemos ter $1 \leq i-j-1 \leq \dfrac{n-3}{2}$ e, fixado n ímpar, temos

$$(n-3)/2 + (n-5)/2 + \ldots + 1 = \frac{(n-3)(n-1)}{8}$$

soluções.

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{(n-4)(n-2)}{8} &= 28 \text{ ou} \\ \frac{(n-3)(n-1)}{8} &= 28. \end{aligned}$$

As únicas soluções positivas das equações anteriores são $n = 17$ e $n = 18$. Resposta letra D.

11. (Extraído da OBM 2013) As quantidades de chocolates que podem ser compradas são os números da forma $8x + 9y + 10z$ com x, y e z inteiros não negativos. Todo número maior que $56 = (8-1)(9-1)$ pode ser escrito na forma $8x + 9y$ com x e y inteiros não negativos. Um número que pode ser escrito na forma $8x + 9y$ em particular também pode ser escrito na forma $8x + 9y + 10z$. Assim, basta analisarmos os números menores que 56 para sabermos qual é o maior deles que não pode ser uma quantidade admissível de chocolates comprados na loja. É fácil verificar que todos os números de 32 até 55 podem ser escritos na forma $8x + 9z + 10z$ e que 31 não é dessa forma.

12. (Extraído da OBM 2016) Note que um mês possui 4 ou 5 sábados e que $365 = 7 \cdot 52 + 1$. Então, um ano possui 52 semanas completas e 1 ou 2 dias extras, dependendo dele ser ou não bissexto. Desse modo, um ano terá 52 ou 53 sábados e, chamando de x o número de meses com 5 sábados, podemos analisar as equações:

$$\begin{aligned} 5x + 4(12-x) = 52 &\quad\Leftrightarrow\quad x = 4; \\ 5x + 4(12-x) = 53 &\quad\Leftrightarrow\quad x = 5. \end{aligned}$$

Então, um ano é sabadoso quando possui 53 sábados e isso acontece quando 1 de janeiro é sábado ou quando 2 de janeiro é sábado e o ano é bissexto, como acontece com 2016. Quando um ano é bissexto, o dia 1 de janeiro “avança dois dias na semana” em relação ao ano anterior e, quando o ano não é bissexto, “ele avança apenas um dia na semana” também em relação ao ano anterior. Desse modo, podemos montar a tabela a seguir com os dias 1 de janeiro dos próximos anos.

Ano	2016	2017	2018	2019
1 de jan	sexta	domingo	segunda	terça
Ano	2020	2021	2022	
1 de jan	quarta	sexta	sábado	

Portanto, o próximo ano sabadoso será 2022.

13. Seja $d = mdc(a,b)$. Podemos reescrever a equação como:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 = \frac{33}{d}.$$

Como lado esquerdo é uma soma de números inteiros, segue que $d \mid 33$. Além disso,

$$\begin{aligned} mdc(a/d, b/d) &= mdc(a/d, 33/d - 1) \\ &= mdc(b/d, 33/d - 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Fixado d, é suficiente encontrarmos pares de inteiros positivos (x,y) com $mdc(x, 33/d - 1) = 1$ tais que $x + y = 33/d - 1$, pois daí obteremos também $mdc(y, 33/d - 1) = 1$ e que $(a,b) = (dx, dy)$ também é solução. Vejamos então as possibilidades para d:

i) Para $d = 1$ e $x + y = 32$, temos 16 soluções, pois basta escolher x ímpar.

ii) Para $d = 3$ e $x + y = 10$, temos 4 soluções, pois x não pode ser par e nem múltiplo de 5.

iii) Para $d = 11$ e $x + y = 2$, temos 1 solução apenas.

iv) Não podemos ter $d = 33$, pois a e b são positivos.

Logo, existem 21 pares de soluções.

14. Fatorando a equação anterior, obtemos:

$$(5x + 3y)(5x - 3y) = 1$$

Assim, como x, y são inteiros, ou ambos os termos anteriores são $+1$ ou ambos são -1. Isso nos produz o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= \pm 1 \\ 5x - 3y &= \pm 1 \end{aligned}$$

Somando as duas equações, obtemos $10x = \pm 2$. Isso é um absurdo e, consequentemente, a equação não possui solução em inteiros.

15. (Extraído da Olimpíada da Irlanda de 1997) Fatore a expressão como:

$$\begin{aligned}(x-1998)(y-1996) &= xy - 1998y - 1996x + 1998\cdot 1996\\ &= 1997^2.\end{aligned}$$

Os divisores de 1997^2 são $\{\pm 1, \pm 1997, \pm 1997^2\}$. Resolvendo os sistemas correspondentes à essas possibilidades, temos: $(x,y) = (1999, 1997^2+1996), (1997, -1997^2+1996), (3995, 3993), (1,-1), (1997^2+1998, 1997), (-1997^2+1998, 1995)$.

16. (Extraído da (URSS 1991)) Uma boa estratégia será aplicar alguma manipulação algébrica, como somar as equações, multiplicá-las, somar um fator de correção, entre outras para obtermos alguma fatoração envolvendo esses números. Nesse problema, vamos elevar ambas as equações ao quadrado.

$$\begin{cases} x^2z^2 - 4xyzt + 4y^2t^2 &= 9\\ x^2t^2 + 2xytz + y^2z^2 &= 1.\end{cases}$$

Multiplicando a segunda por dois e somando com a primeira, temos:

$$\begin{aligned}x^2(z^2+2t^2) + 2y^2(z^2+2t^2) &= 11\\ (x^2+2y^2)(z^2+2t^2) &= 11.\end{aligned}$$

Como cada uma das parcelas acima é um inteiro não-negativo, temos dois casos:

$$\begin{cases} x^2+2y^2 &= 11\\ z^2+2t^2 &= 1\end{cases} \Rightarrow (x,y,z,t) = (\pm 3, \pm 1, \pm 1, 0).$$

ou

$$\begin{cases} x^2+2y^2 &= 1\\ z^2+2t^2 &= 11\end{cases} \Rightarrow (x,y,z,t) = (\pm 1, 0, \pm 3, \pm 1).$$

Logo, as únicas soluções possíveis são as quádruplas $(\pm 1, 0, \pm 3, \pm 1)$ e $(\pm 3, \pm 1, \pm 1, 0)$.

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com