Fórmulas de Diferenciação

Exercícios

Introdução ao Cálculo

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Fórmulas de Diferenciação
Exercícios

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Em cada um dos itens abaixo, encontre a expressão correspondente para $f'(x)$:

a) $f(x) = 3x^2 + 4x + 5$.

b) $f(x) = x^5 + 2\sqrt{x}$.

c) $f(x) = x^2 \cdot x^3$.

Exercício 2. Se $f(x) = x^3 + 30x + 34$, determine o valor de $f'(1)$.

Exercício 3. Se $f(x) = (x+2)^2$, determine o valor de $f'(1)$.

Exercício 4. Se $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$, encontre $f'(x)$.

Exercício 5. Se $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ e $f'(1) = \dfrac{p}{q}$, com $\dfrac{p}{q}$ irredutível, determine o valor de $p+q$.

Exercício 6. Se $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+3}$ e $f'(1) = \dfrac{p}{q}$, com $\dfrac{p}{q}$ irredutível, determine o valor de $p+q$.

Exercício 7. Se $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+11}$ e $f'(1) = \dfrac{p}{q}$, com $\dfrac{p}{q}$ irredutível, determine o valor de $p+q$.

Exercício 8. Se $f(x) = (x^2+6)(x^3+9)$, calcule o valor de $f'(1)$.

Exercício 9. Se $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$, calcule $f'(x)$.

Exercício 10. Calcule

$$S = \lim_{x \to 0} \frac{(x+1)^4 - \sqrt{x+1}}{x}.$$

Exercício 11. Calcule a derivada segunda de $y(t) = \cos t$.

Exercício 12. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = 4x^2$, no ponto $(1, 3)$.

Exercício 13. Determine as equações das retas tangentes ao gráfico de $f(x) = x^3/3 - 1$ que sejam perpendiculares à reta $y + x = 0$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 14. Se $f(x) = -\dfrac{x+1}{x \ln x}$, calcule $f'(e)$.
Dica: Se $g(x) = \ln x$, então $g'(x) = 1/x$.
a) $\frac{e+1}{e^2}$ b) $\frac{e^2+1}{e}$ c) $\frac{2e+1}{e^2}$ d) $\frac{1}{e}$ e) $\frac{1}{e} + \frac{2}{e^2}$.

Exercício 15. Suponha que $y = y(t)$ seja uma função derivável tal que para todo t no seu domínio $y'(t) = ty(t)^2$. Calcule $y''(1)$ supondo que $y(1) = 3$.
a) 63 b) 54 c) 25 d) 16 e) 9.

Exercício 16. Considere as funções dadas por $y = ax^2$ e $y = -x^2 + 1$. Determine a para que os gráficos sejam ortogonais. (Os gráficos se interceptam ortgononalmente em (x_0, y_0) se as retas tangentes aos gráficos, neste ponto, forem perpendiculares.)
a) $1/4$ b) $1/3$ c) $1/2$ d) 1 e) 0.

Exercício 17. Considerando $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, determine o maior valor de x_0 tal que $f'(x_0) = 0$.

Exercício 18. Se $f(x) = x \ln x - x$, determine o valor de $f'(4)$.
a) $2 \ln 2$ b) $\ln 2$ c) 0 d) 1 e) 4.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 19. Se $y(x) = g(x)^2$, verifique que

$$y'(x) = 2g(x) \cdot g'(x)$$

Exercício 20. Determine a equação da reta tangente à elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, no ponto (x_0, y_0), $y_0 \neq 0$.

Exercício 21.

a) Determine a e b de modo que $f(x) = ax + b$ satisfaça $f'(1) = 1$ e $f(1) = 3$.

b) Encontre uma função $y(x)$ tal que $y''(0) = 2$, $y'(0) = 2$ e $y(0) = 3$.

Exercício 22. Determine a de modo que $y(x) = e^{ax}$ verifique a equação:

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0.$$

Exercício 23. Sabe-se que r é uma reta que passa pela origem e que é tangente ao gráfico de $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$. Determine r.

Exercício 24. Para $x \neq 1$, sabemos que

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Determine, usando derivação, uma fórmula para a seguinte soma:

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$$

.

Respostas e Soluções.

1.

a) $f'(x) = 6x + 4$.

b) $f'(x) = 5x^4 + x^{-1/2}$

c) $f'(x) = 5x^4$.

2. Temos $f'(x) = 3x^2 + 30$. Portanto, $f'(1) = 33$.

3. Temos $f'(x) = 2x + 4$. Portanto, $f'(1) = 6$.

4. Pela regra do quociente, $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+3)^2}$.

5. Pela regra do quociente,

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x+2) - 1\cdot x}{(x+2)^2}.$$

Portanto, $f'(1) = \frac{2}{9}$ e assim $p+q = 11$.

6. Pela regra do quociente,

$$f'(x) = \frac{1/2\cdot x^{-1/2}\cdot(x+3) - \sqrt{x}}{(x+3)^2}.$$

Portanto, $f'(1) = \frac{1}{16}$ e assim $p+q = 17$.

7. Pela regra do quociente,

$$f'(x) = \frac{1/2\cdot x^{-1/2}\cdot(x+11) - \sqrt{x}}{(x+11)^2}.$$

Portanto, $f'(1) = \frac{5}{144}$ e assim $p+q = 149$.

8. Pela regra do produto, $f'(x) = 2x(x^2+9) + 3x^2(x^2+6)$. Portanto, $f'(1) = 41$.

9. Solução 1: Pela regra do produto, $[(x+1)(x+2)]' = 1\cdot(x+2) + (x+1)\cdot 1 = 2x+3$. Pela regra do quociente, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{0\cdot(x+1)(x+2) - 1\cdot[(x+1)(x+2)]'}{[(x+1)(x+2)]^2} \\ &= \frac{-(2x+3)}{[(x+1)(x+2)]^2}. \end{aligned}$$

Solução 2: Como

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2},$$

pela regra do quociente temos

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2}.$$

10. Se $h(x) = (x+1)^4 - \sqrt{x+1}$, temos

$$S = \lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}$$

Portanto $S = h'(0)$. Como $h'(x) = 4(x+1)^3 - \frac{(1+x)^{-1/2}}{2}$, temos

$$S = h'(0) = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$

11. Temos $y'(t) = -\sin t$ e $y''(t) = -\cos t$.

12. Como $f(1) = 3$, se m é o coeficiente angular da reta procurada, temos $m = f'(1)$. De $f'(x) = -2x$, segue que a equação da reta é dada por

$$-2 = \frac{y-3}{x-1},$$

ou seja,

$$y + 2x = 5.$$

13. Como o coeficiente angular de $x+y=0$ é -1, o coeficiente da reta perpendicular é 1. Temos $f'(x) = x^2$ e assim queremos encontrar x_0 tal que

$$f'(x_0) = x_0^2 = 1.$$

As soluções são $x_0 = \pm 1$. Essas equações possuem a forma:

$$1 = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Assim, as equações perpendiculares são $3y - 3x + 5 = 0$ e $y - 3x + 1 = 0$

14. Combinando as regras do produto e do quociente, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1\cdot x\ln x - (x+1)(\ln x + 1)}{(x\ln x)^2} \\ &= \frac{x + \ln x + 1}{(x\ln x)^2} \end{aligned}$$

Logo, $f'(e) = \frac{e+2}{e^2} = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2}$.

15.

$$\begin{aligned} y''(t) &= [ty(t)^2]' \\ &= y(t)^2 + 2ty(t)y'(t). \end{aligned}$$

Como $y'(1) = 1\cdot 3^2 = 9$, segue que $y''(1) = 9 + 54 = 63$.

16. No ponto (x_0, y_0) de interseção entre os gráficos, o produto dos coeficientes angulares das retas tangentes deve ser -1, ou seja, $2ax_0\cdot(-2x_0) = -1$. Portanto $x_0^2 = \frac{1}{4a}$. Como os gráficos se intersectam em (x_0, y_0), $ax_0^2 = -x_0^2 + 1$, ou seja, $x_0^2 = \frac{1}{a+1}$. Comparando as duas expressões para x_0^2, podemos concluir que $4a = a+1$ e daí $a = \frac{1}{3}$.

17. Como $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, segue que os possíveis valores de x_0 são $x_0 = 1$ ou $x_0 = 3$. Portanto, o maior valor é 3.

18. Como $f'(x) = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} - 1 = \ln x$. Assim $f'(4) = 2\ln 2$ e a resposta está no item a).

19. Pela regra do produto

$$\begin{aligned} y'(x) &= [g(x)\cdot g(x)]' \\ &= g'(x)\cdot g(x) + g(x)\cdot g'(x) \\ &= 2g(x)\cdot g'(x) \end{aligned}$$

20. Para $y_0 \neq 0$, (x_0, y_0) pertence a um dos gráficos das funções $f_1(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ ou $f_2(x) = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. Assim,

$y = y(x)$ é diferenciável e a partir da equação dada podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \cdot y'(x) &= 0\\ \frac{y}{b^2} \cdot y'(x) &= \frac{-x}{a^2}\\ y'(x) &= -\frac{x}{y} \cdot \frac{b^2}{a^2}.\end{aligned}$$

Portanto, no ponto (x_0, y_0) a inclinação é

$$-\frac{x_0}{y_0} \cdot \frac{b^2}{a^2}.$$

A equação da reta tangente é

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{x_0}{y_0} \cdot \frac{b^2}{a^2}.$$

21.

a) De $f(1) = 3$, podemos concluir que $a + b = 3$. Como $f'(1) = a$, segue que $a = 1$ e $b = 2$.

b) Existem infinitas funções que satisfazem a condição, mas baseado no item anterior tentaremos descobrir a, b e c tais que uma função da forma $y(x) = ax^2 + bx + c$ cumpra o desejado. De $y''(0) = 1$, deveríamos ter $2a = 2$, ou seja, $a = 1$. De $y'(0) = 2$, teríamos $b = 2$. Finalmente, de $y(0) = 3$, precisaríamos que $c = 3$. É fácil verificar que $y(x) = x^2 + 2x + 3$ satiasfaz as condições do enunciado.

22. Como $y'(x) = ae^{ax}$ e $y''(x) = a^2e^{ax}$, devemos ter

$$e^{ax}(a^2 - 3a + 2) = 0.$$

Como $e^{ax} \neq 0$ para todo x, segue que precisamos garantir que $a^2 - 3a + 2 = 0$. Portanto $a = 1$ ou $a = 2$.

23. Como r passa pela origem, sua equação é da forma $y = kx$. Suponha que (a, b) é o ponto de interseção entre a reta tangente e o gráfico da função. Então $k = f'(a) = 3a^2 + 4a$. Além disso, $f(a) = a^3 + 2a^2 - 3a = k \cdot a$. Portanto, $a \neq 0$, $a^2 + 2a - 3 = k = 3a^2 + 4a$ e daí $2a^2 + 2a + 3 = 0$, que não possui raízes reais. Assim $a = 0$ e a reta r é o eixo x. De fato, como $f'(0) = 0$, e $f(0) = 0$, o eixo x é tangente ao gráfico de f em $(0, 0)$.

24. Seja $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$. Por um lado, temos

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}.$$

Por outro lado, pela regra do quociente,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}\right)'\\ &= \frac{(n+1)x^n(x-1) - x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}.\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} &=\\ \frac{(n+1)x^n(x-1) - x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}\end{aligned}$$

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com