Função Logarítmica

Exercícios e Aplicações

1° ano E.M.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

Portal da Matemática
OBMEP

Função Logarítmica
Exercícios e Aplicações

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine o valor dos logaritmos abaixo.

a) $\log_{12} 12$.

b) $\log_6 1$.

c) $\log_4 4^4$.

d) $3^{\log_3 2^k}$.

Exercício 2. Determine o valor da expressão:

$$\left[\log\left(4 \cdot \log_3 3^{25}\right)\right]^3.$$

Exercício 3. Determine a soma das raízes da equação:

$$(\log_2 x)^2 - \log_2 x^6 + 8 = 0.$$

a) 0.

b) 20.

c) 40.

d) 60.

e) 80.

Exercício 4. Determine a solução real da equação:

$$\log 2^x + \log(1 + 2^x) = \log 6.$$

Exercício 5. A raiz da equação $\log(x+1) + 1 = \log(x^2 + 35)$ é um número:

a) irracional.

b) primo.

c) múltiplo de 3.

d) negativo.

e) divisor de 12.

Exercício 6. Acrescentando 16 unidades a um número, seu logaritmo na base 3 aumenta 2 unidades. Qual é o número?

Exercício 7. Resolva o sistema: $\begin{cases} x + y = 20 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 8. Supondo que $\log 3 = 0,477$ e $\log 103 = 2,013$, qual o tempo mínimo necessário para que uma população, que cresce 3% ao ano, triplique?

Exercício 9. Determine a solução do sistema: $\begin{cases} a^2 + b^2 = 425 \\ \log a + \log b = 2 \end{cases}$.

Exercício 10. A área de uma floresta vem diminuindo 20% ao ano devido à exploração humana. Se isso continuar acontecendo, em quanto tempo a área desta floresta ficará reduzida à décima parte de sua área atual? (Utilize $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,48$)

Exercício 11. Resolva a equação:

$$2\log\sqrt[4]{x} + \log_{10^4} x^2 = 2.$$

Exercício 12. Segundo a Lei de Resfriamento de Newton, a temperatura T de um corpo colocado num ambiente cuja temperatura é T_o e obedece à seguinte relação:

$$T(t) = T_o + k \cdot e^{-ct},$$

sendo T medida na escala Celsius, t medido em horas, a partir do instante em que o corpo foi colocado no ambiente, e a base do logaritmo natural, k e c são constantes. Considere uma xícara contendo café, inicialmente a 100^oC, colocada numa sala de temperatura 20^oC. Vinte minutos depois, a temperatura do café passa a ser 40^oC.

a) Calcule a temperatura do café 50 minutos após a xícara ter sido colocada na sala.

b) Considerando $\ln 2 = 0,7$ e $\ln 3 = 1,1$, estabeleça o tempo aproximado em que, depois de a xícara ter sido colocada na sala, a temperatura do café se reduziu à metade.

Exercício 13. Suponha que o preço de um automóvel tenha uma desvalorização média de 19% ao ano sobre o preço do ano anterior. Se F representa o preço inicial (preço de fábrica) e $p(t)$, o preço após t anos, pede-se:

a) A expressão para $p(t)$.

b) O tempo mínimo necessário, em número inteiro de anos, após a saída da fábrica, para que um automóvel venha a valer menos que 5% do valor inicial. (Utilize $\log 2 = 0,301$ e $\log 3 = 0,477$)

Exercício 14. O pH de uma solução é definido por: $pH = \log\left(\dfrac{1}{H^+}\right)$, onde pH é a concentração de hidrogênio em íons-grama por litro de solução. Dessa forma, o pH de uma solução, tal que $H^+ = 10^{-8}$, é:

a) -8.

b) $\dfrac{1}{8}$.

c) 8.

d) 10^8.

e) 10^{-8}.

Exercício 15. O produto das soluções da equação na variável real x, $\log_2(9^{x-2}+7) = 2 + \log_2(3^{x-2}+1)$, é um número:

a) primo.

b) par.

c) negativo.

d) irracional.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 16. Um lago usado para abastecer uma cidade foi contaminado após um acidente industrial, atingindo o nível de toxidez T_o, correspondente a dez vezes o nível inicial. Leia as informações a seguir:

i. A vazão natural do lago permite que 50% de seu volume sejam renovados a cada dez dias;

ii. O nível de toxidez $T(x)$, após x dias do acidente, pode ser calculado por meio da equação $T(x) = T_o \cdot (0,5)^{0,1x}$.

Considere D o menor número de dias de suspensão do abastecimento de água, necessário para que a toxidez retorne ao nível inicial. Sendo $\log 2 = 0,3$, o valor de D é igual a:

a) 30.

b) 32.

c) 34.

d) 36.

Exercício 17. Sendo p e q números reais, com $p > q$ e $p + q > 0$, definiremos a operação $\diamond$ entre p e q da seguinte forma: $p \diamond q = p^2 - q^2 + \log(p+q)$. Utilizando-se esta definição, o valor de $10 \diamond (-5)$ é igual a:

a) $176 - \log 2$.

b) $174 - \log 2$.

c) $76 - \log 2$.

d) $74 + \log 2$.

e) $74 - \log 2$.

Exercício 18. Suponha que a quantidade Q de um determinado medicamento no organismo t horas após sua administração possa ser calculada pela fórmula:

$$Q = 15 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{2t},$$

sendo Q medido em miligramas, a expressão que fornece o tempo t em função da quantidade de medicamento Q é:

a) $t = \log \sqrt{\dfrac{15}{Q}}$.

b) $t = \dfrac{\log 15}{2 \log Q}$.

c) $t = 10\sqrt{\log \dfrac{Q}{15}}$.

d) $t = \dfrac{1}{2} \cdot \log \dfrac{Q}{15}$.

e) $t = \log \dfrac{Q^2}{225}$.

Exercício 19. Mostre que $\ln \sqrt[3]{e^2} + (\log_3 2) \cdot (\log_4 9)$ é um número racional.

Exercício 20. Sejam $\log 5 = m$, $\log 2 = p$ e $N = 125\sqrt[3]{\dfrac{1562,5}{\sqrt[5]{2}}}$. O valor de $\log_5 N$, em função de m e p, é:

a) $\dfrac{75m + 6p}{15m}$.

b) $\dfrac{70m - 6p}{15m}$.

c) $\dfrac{75m - 6p}{15m}$.

d) $\dfrac{70m + 6p}{15m}$.

e) $\dfrac{70m + 6p}{15p}$.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com

Respostas e Soluções.

1.

a) $\log_{12} 12 = 1$.

b) $\log_6 1 = 0$.

c) $\log_4 4^4 = 4$.

d) $3^{\log_3 2^k} = 2^k$.

2.

$$\begin{aligned}
\left[\log\left(4\cdot\log_3 3^{25}\right)\right]^3 &= \\
\left[\log\left(4\cdot 25\right)\right]^3 &= \\
\left[\log 100\right]^3 &= \\
2^3 &= 8.
\end{aligned}$$

3. Substituindo $\log_2 x$ por y, chegamos à equação $y^2 - 6y + 8 = 0$, cujas raízes são $y_1 = 2$ e $y_2 = 4$, ou seja, $\log_2 x = 2$ ou $\log_2 x = 4$, donde $x_1 = 4$ e $x_2 = 16$. Resposta B.

4.

$$\begin{aligned}
\log 2^x + \log(1+2^x) &= \log 6\\
\log[2^x(1+2^x)] &= \log 6\\
2^x(1+2^x) &= 6\\
2^{2x} + 2^x - 6 &= 0.
\end{aligned}$$

Fazendo $2^x = y$, temos a equação $y^2 + y - 6 = 0$, cujas raízes são $y_1 = -3$ e $y_2 = 2$, ou seja, $2^x = -3$ (não convém) ou $2^x = 2$, segue que $x = 1$.

5.

$$\begin{aligned}
\log(x+1) + 1 &= \log(x^2+35)\\
\log(x+1) + \log 10 &= \log(x^2+35)\\
\log[10(x+1)] &= \log(x^2+35)\\
10x + 10 &= x^2 + 35\\
x^2 - 10x + 25 &= 0\\
x &= 5.
\end{aligned}$$

Resposta B.

6. Seja x o referido número e $\log_3 x = y$, temos, pelo enunciado, que:

$$\begin{aligned}
\log_3(x+16) &= y+2\\
\log_3(x+16) &= \log_3 x + 2\\
\log_3(x+16) - \log_3 x &= 2\\
\log_3\left(\frac{x+16}{x}\right) &= 2\\
\frac{x+16}{x} &= 3^2\\
x+16 &= 9x\\
8x &= 16\\
x &= 2.
\end{aligned}$$

7. Pela segunda equação temos $\log(xy) = 2$, donde $xy = 100$ e, substituindo a primeira equação, chegamos a $x(20-x) = 100$, que é o mesmo que $x^2 - 20x + 100 = 0$, cujas raízes são $x_1 = x_2 = 10$ e, consequentemente, $y = 10$. Portanto, $x = 10$ e $y = 10$.

8. (Extraído da Vídeo Aula) Seja $P(t)$ a população em um determinado tempo t e P_o a população atual, temos:

$$\begin{aligned}
P(t) &= P_o\cdot(1,03)^t\\
3\cdot P_o &= P_o\cdot(1,03)^t\\
3 &= (1,03)^t\\
\log 3 &= \log(1,03)^t\\
\log 3 &= t\cdot\log 1,03\\
0,477 &= t\cdot\log\frac{103}{100}\\
0,477 &= t\cdot(\log 103 - \log 100)\\
0,477 &= t\cdot(2,013-2)\\
0,013t &= 0,477\\
t &\cong 36,7.
\end{aligned}$$

Portanto, serão necessários aproximadamente 36,7 anos para que a população triplique.

9. Pela segunda equação, temos $\log(ab) = 2$, donde $ab = 100$ (I). Como $a^2 + b^2 = 425$, então $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 425 + 200 = 625$, ou seja, $a + b = 25$ (II), pois a e b devem ser positivos. Substituindo (II) em (I), temos $a(25-a) = 100$, que é o mesmo que $a^2 - 25a + 100 = 0$, segue que $a_1 = 5$ e $a_2 = 20$. Assim, a solução do sistema é $(5, 20)$, podendo ocorrer $a = 5$ e $b = 20$ ou $a = 20$ e $b = 5$.

10. (Extraído da Vídeo Aula) Seja $A(t)$ a área da floresta em um tempo t dado em anos e A_o a área atual. Temos:

$$\begin{aligned}
A(t) &= A_o\cdot 0,8^t\\
\frac{1}{10}\cdot A_o &= A_o\cdot 0,8^t\\
\frac{1}{10} &= 0,8^t\\
\log\frac{1}{10} &= \log 0,8^t\\
-1 &= t\cdot\log\frac{8}{10}\\
-1 &= t\cdot(\log 2^3 - \log 10)\\
-1 &= t\cdot(0,9-1)\\
-0,1t &= -1\\
t &= 10.
\end{aligned}$$

Portanto, a floresta será reduzida à décima parte daqui a 10 anos.

11.

$$\begin{aligned}
2\log\sqrt[4]{x}+\log_{10^4}x^2 &= 2\\
\frac{2}{4}\log x+\log\sqrt{x} &= 2\\
\frac{1}{2}\log x+\frac{1}{2}\log x &= 2\\
\log x &= 2\\
x &= 10^2\\
x &= 100.
\end{aligned}$$

12. (Extraído da Vídeo Aula)

a) Se inicialmente a temperatura do café é 100^oC e a temperatura do ambiente é 20^o, temos $100 = 20 + k \cdot e^0$, donde $k = 80$. Além disso, após 20 minutos, a temperatura do café cai para 40^o, ou seja, $40 = 20 + 80 \cdot e^{-\frac{c}{3}}$, segue que $e^{-\frac{c}{3}} = \dfrac{1}{4}$. Assim, após 50 minutos, a temperatura do café será $T = 20 + 80 \cdot e^{-\frac{5c}{6}} = 20 + 80 \cdot \left(e^{-\frac{c}{3}}\right)^{\frac{5}{2}} = 20 + 80 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{5}{2}} = 20 + 80 \cdot \dfrac{1}{32} = 22,5^oC$.

b)

$$\begin{aligned}
50 &= 20+80\cdot e^{-ct}\\
30 &= 80\cdot\left(e^{-\frac{c}{3}}\right)^{\frac{t}{3}}\\
\frac{3}{8} &= \left(\frac{1}{4}\right)^{3t}\\
\ln\frac{3}{8} &= \ln\left(\frac{1}{4}\right)^{3t}\\
\ln 3-3\ln 2 &= 3t\cdot(\ln 1-\ln 4)\\
\frac{1,1-3\cdot 0,7}{3} &= t\cdot(-2)\cdot 0,7\\
-\frac{1}{3} &= -1,4t\\
t &= 0,24.
\end{aligned}$$

Portanto, a temperatura será a metade após aproximadamente $0,24h$ ou $14,4min$.

13. (Extraído da Unicamp)

a) $p(t) = F \cdot (0,81)^t$.

b)

$$\begin{aligned}
p(t) &= F\cdot(0,81)^t\\
F\cdot(0,81)^t &< 0,05F\\
(0,81)^t &< 0,05\\
t\log 0,81 &< \log 0,05\\
t\log\frac{81}{100} &< \log\frac{1}{20}\\
t(4\log 3-2\log 10) &< \log 1-\log 20\\
-0,092t &< -\log 10-\log 2\\
-0,092t &< -1,301\\
t &> \frac{1,301}{0,092}\\
t &> 14,14.
\end{aligned}$$

Portanto, o tempo mínimo em número inteiro de anos é 15.

14. (Extraído da UFOP-MG) $pH = \log\left(\dfrac{1}{10^{-8}}\right) = \log 1 - \log 10^{-8} = 0 - (-8)\cdot 1 = 8$. Resposta C.

15.

$$\begin{aligned}
\log_2(9^{x-2}+7) &= 2+\log_2(3^{x-2}+1)\\
\log_2(9^{x-2}+7) &= \log_2 4+\log_2(3^{x-2}+1)\\
\log_2(9^{x-2}+7) &= \log_2\left[4(3^{x-2}+1)\right]\\
9^{x-2}+7 &= 4(3^{x-2}+1)\\
\left(3^{x-2}\right)^2+7 &= 4\cdot 3^{x-2}+4.
\end{aligned}$$

Vamos fazer uma mudança de incógnitas: $3^{x-2} = y$. Temos, então:

$$\begin{aligned}
y^2+7 &= 4y+4\\
y^2-4y+3 &= 0\\
y_1 &= 1\\
y_2 &= 3.
\end{aligned}$$

Portanto, $3^{x-2} = 1$ ou $3^{x-2} = 3$, segue que $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$, sendo $2 \cdot 3 = 6$, um número par. Resposta B.

16. (Extraído da UERJ - 2013) Após o acidente o nível de toxidez atingiu 10 vezes o inicial. Então, para voltar ao normal, deverá ser $\dfrac{1}{10}$ do valor atingido. Assim, o tempo para que ele volte ao normal é:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{10}T_o &= T_o \cdot (0,5)^{0,1x}\\
\frac{1}{10} &= (0,5)^{0,1x}\\
\log\frac{1}{10} &= \log(0,5)^{0,1x}\\
\log 1 - \log 10 &= 0,1x\cdot\log\frac{1}{2}\\
0-1 &= 0,1x(\log 1 - \log 2)\\
-1 &= 0,1x(0-0,3)\\
-10 &= x(-0,3)\\
x &= \frac{100}{3}.
\end{aligned}$$

Portanto, o tempo necessário é de aproximadamente 33 dias, sendo $D = 34$. Resposta C.

17. (Extraído da FGV - 2016)

$$\begin{aligned}
10\diamond(-5) &= 10^2 - (-5)^2 + \log(10-5)\\
&= 100 - 25 + \log 5\\
&= 75 + \log\frac{10}{2}\\
&= 75 + \log 10 - \log 2\\
&= 75 + 1 - \log 2\\
&= 76 - \log 2.
\end{aligned}$$

Resposta C.

18. (Extraído da UFPR - 2017)

$$\begin{aligned}
Q &= 15\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{2t}\\
\log Q &= \log\left[15\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{2t}\right]\\
\log Q &= \log 15 + \log\left(\frac{1}{10}\right)^{2t}\\
\log Q &= \log 15 + 2t\log\left(\frac{1}{10}\right)\\
\log Q - \log 15 &= 2t(-1)\\
2t &= \log 15 - \log Q\\
t &= \frac{1}{2}\log\frac{15}{Q}\\
t &= \log\sqrt{\frac{15}{Q}}.
\end{aligned}$$

Resposta A.

19. (Extraído do ITA - 2015 - Adaptado)

$$\begin{aligned}
\ln\sqrt[3]{e^2} + (\log_3 2)\cdot(\log_4 9) &=\\
\ln e^{\frac{2}{3}} + (\log_3 2)\cdot(\log_2 3) &=\\
\frac{2}{3} + \frac{\log 2}{\log 3}\cdot\frac{\log 3}{\log 2} &=\\
\frac{2}{3} + 1 &= \frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

20. (Extraído do IME)

$$\begin{aligned}
N &= 125\sqrt[3]{\frac{1562,5}{\sqrt[5]{2}}}\\
&= 125\sqrt[3]{\frac{3125}{2\cdot\sqrt[5]{2}}}\\
&= 5^3\sqrt[3]{\frac{5^5}{2^{\frac{6}{5}}}}\\
&= \frac{5^3\cdot 5^{\frac{5}{3}}}{2^{\frac{2}{5}}}\\
&= \frac{5^{\frac{14}{3}}}{2^{\frac{2}{5}}}.
\end{aligned}$$

Sendo assim, temos:

$$\begin{aligned}
\log_5 N &= \log_5\frac{5^{\frac{14}{3}}}{2^{\frac{2}{5}}}\\
&= \log_5 5^{\frac{14}{3}} - \log_5 2^{\frac{2}{5}}\\
&= \frac{14}{3} - \frac{2}{5}\cdot\frac{\log 2}{\log 5}\\
&= \frac{14}{3} - \frac{2}{5}\cdot\frac{p}{m}\\
&= \frac{70m - 6p}{15m}.
\end{aligned}$$

Resposta B.

ELABORADO POR CLEBER ASSIS E TIAGO MIRANDA
PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
CONTATO@CURSOARQUIMEDES.COM