Módulo de Números Inteiros e Números Racionais

Números Racionais e Suas Operações.

7° ano E.F.

Números Inteiros e Números Racionais
Números Racionais e Suas Operações.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. No quadro abaixo, determine quais números são racionais.

23	$5,345$	$\sqrt{2}$
$2,313131\ldots$	$\dfrac{1}{3}$	$0,01001000100001\ldots$
$0,444\ldots$	$-\dfrac{2}{7}$	$\sqrt[4]{5}$
$-0,111\ldots$	$-\dfrac{349}{12}$	$\sqrt[3]{27}$
$89,1011121314\ldots$	π	$\sqrt{0,04}$

Exercício 2. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.

b) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

c) $1 \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$.

d) $r \in \mathbb{Q} \Rightarrow -r \in \mathbb{Q}$.

e) $\dfrac{40}{8} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$.

f) $\sqrt[3]{27} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$.

g) $\sqrt{0,04} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$.

Exercício 3. Represente em uma reta orientada os seguintes números:

$$3,5 \quad -\frac{9}{4} \quad 0 \quad \frac{14}{7} \quad 5,\overline{2} \quad -\frac{30}{7}$$

Exercício 4. Um digitador produz 200 folhas de um livro em 3 dias, trabalhando 4 horas por dia; um outro digitador faz o mesmo trabalho em 4 dias, trabalhando 5 horas por dia. Em quanto tempo, os dois juntos, trabalhando 6 horas por dia, produzirão 400 folhas do mesmo livro?

Exercício 5. Uma torneira sozinha enche um tanque em duas horas e outra torneira (sozinha) enche o mesmo tanque em três horas. Em quanto tempo as duas torneiras juntas encherão esse tanque?

Exercício 6. Encontre a fração geratriz de:

a) $0,555\ldots$.

b) $0,232323\ldots$

c) $4,\overline{2}$.

d) $-0,111\ldots$.

Exercício 7. Uma barra de chocolate é dividida entre Nelly, Penha e Sônia. Sabendo que Nelly ganha $\dfrac{2}{5}$ da barra, Penha ganha $\dfrac{1}{4}$ e Sônia ganha 70 gramas. Qual o peso, em gramas, da barra?

Exercício 8. Para qualquer número positivo x, dizemos que os números $x+1$ e $\dfrac{x}{x+1}$ são filhos de x e que os dois são irmãos. Por exemplo, $\dfrac{3}{2}$ e $\dfrac{1}{3}$ são irmãos, pois são filhos de $\dfrac{1}{2}$; de fato, $\dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2} + 1$ e $\dfrac{1}{3} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1}$.

a) Encontre um irmão de $\dfrac{5}{7}$.

b) Um número pode ser filho de dois números positivos diferentes? Por quê?

c) Mostre que $\dfrac{1}{2015}$ é descendente de 1, isto é, ele é filho de um filho de um filho... de um filho de 1.

Exercício 9. Qual o valor numérico da expressão

$$-\sqrt[3]{-8} + 16^{-\frac{1}{4}} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} + 8^{-\frac{4}{3}}?$$

Exercício 10. Responda o que se pede.

a) O número $\dfrac{40}{6}$ é racional?

b) Entre quais inteiros ele se localiza na reta numérica?

Exercício 11. Responda o que se pede.

a) O número $-\dfrac{19}{4}$ é racional?

b) Entre quais inteiros ele se localiza na reta numérica?

Exercício 12. Use os sinas de $<$ e $>$ para comparar, em cada um dos itens abaixo, as frações.

a) $\dfrac{20}{6}$ ——— $\dfrac{8}{3}$.

b) $\dfrac{8}{11}$ ——— $\dfrac{29}{40}$.

c) $-\dfrac{7}{15}$ ——— $-\dfrac{15}{31}$.

d) $-\dfrac{32}{9}$ ——— $-\dfrac{65}{19}$.

Exercício 13. Um robô começou um estudo no solo de marte e conseguiu perfurar até $8,5$ metros. Depois de recolher algum material subiu $4,9$ metros para uma análise do terreno. Em qual distância ele se encontra da superfície?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 14. Escreva três racionais que estejam entre os números:

a) 1 e 3

b) -1 e -2.

c) $-5,56$ e $-5,6$.

Exercício 15. O metrô da cidade de Sacletiba foi ampliado em $2,7$ km e passou a ter $17,4$ km. Quantos quilômetros o metrô possuía antes da ampliação?

Exercício 16. O computador de Luíza quebrou e ela teve que ir uma *LAN House* para digitar um trabalho da escola. Após 4 horas e 30 minutos ela o terminou e pagou R\$ $7,65$. Quanto ela pagou por hora?

Exercício 17. Há muitos anos atrás, uma empresa de picolés fez o anúncio

"Na troca de 10 palitos de picolés,
ganhe um picolé no palito."

Que fração representa o valor de picolé sem o palito em relação ao valor de palito?

Exercício 18. Qual o valor de

$$\frac{2^{98}+4^{50}-8^{34}}{2^{99}-32^{20}+2^{101}}?$$

Exercício 19. Qual o valor de $0,1^2+0,2^2$?

Exercício 20. Escreva o período dos decimais periódicos:

a) $0,789789789\ldots$.

b) $12,4888\ldots$.

c) $-4598,252525\ldots$.

Exercício 21. Encontre a fração geratriz de:

a) $0,333\ldots$.

b) $0,121212\ldots$

c) $6,\overline{5}$.

d) $-0,666\ldots$.

Exercício 22. Simplificando a expressão $\dfrac{3\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}{3\left(-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{3}{2}}$, obtemos:

a) $-\dfrac{6}{7}$. b) $-\dfrac{7}{6}$. c) $\dfrac{6}{7}$. d) $\dfrac{7}{6}$. e) $-\dfrac{5}{7}$.

Exercício 23. Qual o valor da expressão

$$1:\left(1+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{(1+1)^2}\right)^2}\right)^2?$$

Exercício 24. Obtenha as geratrizes das seguintes dízimas periódicas:

a) $4,7222\ldots$.

b) $1,8999\ldots$.

c) $1,2010101\ldots$.

Exercício 25. Qual o valor da expressão

$$5\cdot\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\left[\left(\frac{2}{9}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{3}\right]:\frac{6}{5}}?$$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 26. Na expressão $\dfrac{M\times A\times T\times E\times M}{A\times T\times I\times C\times A}$, letras diferentes representam dígitos diferentes e letras iguais representam dígitos iguais. Qual é o maior valor possível desta expressão?

a) 38 b) 96 c) 108 d) 576 e) 648

Exercício 27. Uma máquina A pode realizar um trabalho em 3 horas. Uma máquina B pode realizar o mesmo trabalho em 6 horas. Se trabalharem juntas, as máquinas A e B demorarão quanto tempo para executar o trabalho?

Exercício 28. Ana começou a descer uma escada no mesmo instante em que Beatriz começou a subi-la. Ana tinha descido $\dfrac{3}{4}$ da escada quando cruzou com Beatriz. No momento em que Ana terminar de descer, que fração da escada Beatriz ainda terá que subir?

Exercício 29. Calcule o valor das expressões:

a) $(0,01)^3$.

b) $100\cdot\dfrac{1}{5^2}$.

c) $80\cdot\left(\dfrac{5}{2}\right)^3$.

d) $\dfrac{1}{3}\cdot(0,3)^2$.

e) $200\cdot(0,04)^4$.

Exercício 30. Escreva como um única potência:

a) $\dfrac{2^4 \cdot 2^6}{3^7 \cdot 3^3}$.

b) $\dfrac{4^6 \cdot 8^2}{16^3}$.

c) $(-32)^{3^2}$.

d) $\dfrac{10^5 \cdot 10^{-3} \cdot 10}{10^{-7} \cdot 10^4}$.

e) $8^3 : 2^{-5}$.

Exercício 31. Qual é o primeiro dígito não nulo após a vírgula na representação decimal da fração $\dfrac{1}{5^{12}}$?

a) 1 b) 2 c) 4 d) 5 e) 7.

Exercício 32. Sabe-se que $\dfrac{2}{9}$ do conteúdo de uma garrafa enchem $\dfrac{6}{5}$ de um copo. Para encher 15 copos iguais a esse, quantas garrafas deverão ser usadas?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6.

Exercício 33. Simplifique a seguinte fração:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \cdot 12 + 7 \cdot 14 \cdot 21}{1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot 10 + 4 \cdot 12 \cdot 20 + 7 \cdot 21 \cdot 35}.$$

Exercício 34. A sequência F_n de Farey é uma sequência de conjuntos formados pelas frações irredutíveis $\dfrac{a}{b}$ com $0 \le a \le b \le n$ arranjados em ordem crescente. Exibimos abaixo os quatro primeiros termos da sequência de Farey.

$$\begin{aligned}
F_1 &= \{0/1, 1/1\} \\
F_2 &= \{0/1, 1/2, 1/1\} \\
F_3 &= \{0/1, 1/3, 1/2, 2/3, 1/1\} \\
F_4 &= \{0/1, 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4, 1/1\}
\end{aligned}$$

Qual deve ser o conjunto F_5?

Exercício 35. É possível mostrar que se duas frações $\dfrac{a}{b}$ e $\dfrac{c}{d}$ são vizinhas na sequência de Farey F_n (veja o exercício anterior) então $ad - bc = \pm 1$. Sabendo disso, você consegue determinar que fração $\dfrac{a}{b}$ está imediatamente à esquerda de $\dfrac{5}{7}$ em F_7 sem calcular todos os seus elementos?

Exercício 36. Qual o valor da expressão

$$\left[\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot (0,666\ldots)} + \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^0 - \frac{1}{(1,333\ldots)}}\right]?$$

Exercício 37. Resolva as expressões

a) $\left[\sqrt{\left(\dfrac{1}{6}\right)^{-3} \cdot \dfrac{2}{3}} + \sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^0 - \dfrac{1}{\frac{4}{3}}}\right]^{-2}$.

b) $\sqrt{1,777\ldots} + \sqrt{0,444\ldots} - (0,555\ldots)^{-1}$

Exercício 38. Qual o menor inteiro positivo n tal que as 73 frações

$$\frac{19}{n+21}, \frac{20}{n+22}, \frac{21}{n+23}, \ldots, \frac{91}{n+93}$$

sejam todas irredutíveis?

Exercício 39. A professora Luísa observou que o número de meninas de sua turma dividido pelo número de meninos dessa mesma turma é $0,48$. Qual é o menor número possível de alunos dessa turma?

a) 24 b) 37 c) 40 d) 45 e) 48

Respostas e Soluções.

1. Números racionais são aqueles que podem ser expressos por uma fração com numerador e denominador inteiros, sendo este último não nulo. Assim, podemos completar o quadro da seguinte forma:

$23 \in \mathbb{Q}$	$5,345 \in \mathbb{Q}$	$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
$2,313131\ldots \in \mathbb{Q}$	$\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$	$0,01001000100001\ldots \notin \mathbb{Q}$
$0,444\ldots \in \mathbb{Q}$	$-\frac{2}{7} \in \mathbb{Q}$	$\sqrt[4]{5} \notin \mathbb{Q}$
$-0,111\ldots \in \mathbb{Q}$	$-\frac{349}{12} \in \mathbb{Q}$	$\sqrt[3]{27} \in \mathbb{Q}$
$89,1011121314\ldots \notin \mathbb{Q}$	$\pi \notin \mathbb{Q}$	$\sqrt{0,04} \in \mathbb{Q}$

2. Já sabemos que valem as inclusões $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Assim:

a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.Verdadeira!

b) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.Verdadeira!

c) $1 \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$.Falsa, pois $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ é o conjunto das frações não inteiras.

d) $r \in \mathbb{Q} \Rightarrow -r \in \mathbb{Q}$. Verdadeira!

e) $\dfrac{40}{8} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$. Falsa, pois $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ é o conjunto das frações não inteiras e $\frac{40}{8} = 5$.

f) $\sqrt[3]{27} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$. Falsa, pois $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ é o conjunto das frações não inteiras e $\sqrt[3]{27} = 3$.

g) $\sqrt{0,04} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$. Verdadeira, pois $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ é o conjunto das frações não inteiras e $\sqrt{0,04} = \sqrt{\dfrac{4}{100}} = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$.

3. Uma representação seria:

4. O primeiro digitador produz 200 folhas em $3 \times 4 = 12$ horas de trabalho. Portanto, a sua produção em uma hora será igual a $\dfrac{200}{12}$ folhas. O segundo digitador produz 200 folhas em $4 \times 5 = 20$ horas. Portanto, a sua produção em uma hora será igual a $\dfrac{200}{20}$ folhas. Os dois juntos produzirão em uma hora a soma $\dfrac{200}{12} + \dfrac{200}{20} = \dfrac{80}{3}$ folhas e para produzir 400 folhas serão gastas

$$\frac{400}{\frac{80}{3}} = 400 \times \frac{3}{80} = 15 \text{ horas.}$$

Por fim, se eles trabalharão 6 horas por dia, então serão 2 dias e 3 horas

5. Vazão é a razão entre o volume (V) de água despejado e o tempo (t) para despejá-lo. Observe que a primeira torneira tem vazão $\dfrac{V}{2}$, já a segunda tem $\dfrac{V}{3}$. Queremos saber qual a vazão de uma toneira equivalente (de vazão $\dfrac{V}{t}$) às duas trabalhando juntas. Isso é equivalente a resolver a equação

$$\begin{aligned}\frac{V}{2} + \frac{V}{3} &= \frac{V}{t}\\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} &= \frac{1}{t}\\ t &= \frac{1}{\frac{5}{6}}\\ t &= \frac{6}{5}\\ t &= 1 \text{ hora e 12 minutos.}\end{aligned}$$

6.

a)

$$\begin{aligned} x &= 0,555\ldots\\ 10x &= 5,555\ldots \Rightarrow\\ 9x &= 5\end{aligned}$$

Logo, $x = \dfrac{5}{9}$.

b)

$$\begin{aligned} x &= 0,232323\ldots\\ 100x &= 23,232323\ldots \Rightarrow\\ 99x &= 23\end{aligned}$$

Logo, $x = \dfrac{23}{99}$.

c)

$$\begin{aligned} x &= 4,222\ldots\\ 10x &= 42,222\ldots \Rightarrow\\ 9x &= 38\end{aligned}$$

Logo, $x = \dfrac{38}{9}$.

d)

$$\begin{aligned} x &= -0,111\ldots\\ 10x &= -1,111\ldots \Rightarrow\\ 9x &= -1\end{aligned}$$

Logo, $x = -\dfrac{1}{9}$.

7. (Adaptado do da OBM)
Veja que Nelly e Penha pegam juntas

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{4}=\frac{8}{20}+\frac{5}{20}=\frac{13}{20}$$

da barra. Portanto, os 70 gramas de Sônia representam $\frac{7}{20}$ da barra. Dessa forma, o peso da barra será

$$\frac{20}{7}\cdot 70 = 200 \text{ gramas}.$$

8. (Adaptado do Banco de Questões da OBMEP – 2012)
Do enunciado, garantimos que as frações envolvidas no problema devem ser positivas.

a) Suponhamos que $\frac{5}{7}$ seja filho de um número positivo x. Então, $\frac{5}{7}=x+1$ ou $\frac{5}{7}=\frac{x}{x+1}$. A primeira equação resulta em $x=-\frac{2}{7}$, que não convém, já da segunda temos $x=\frac{7}{2}$.

b) Suponhamos que seja possível que x seja filho de y e z. Sendo assim, teremos

   i) $x+1=z+1$, o que implica $x=z$.

   ii) $1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{x+1}=\frac{z}{z+1}=1-\frac{1}{1+z}$, o que implica $x=z$.

   iii) $x+1=\frac{z}{z+1}$, o que implica $x(z+1)=-1$, sem solução nos inteiros positivos.

   iv) $z+1=\frac{x}{x+1}$, o que implica $z(x+1)=-1$, sem solução nos inteiros positivos.

c) Como sugestão, analise o que aconteceu com o $\frac{1}{2}$ sendo pai de $\frac{1}{3}$ e complete o raciocínio calculando de $\frac{1}{4}$ é filho de $\frac{1}{3}$. Vamos provar que $\frac{1}{n+1}$ é filho de $\frac{1}{n}$.
Para $x=\frac{1}{n}$ teremos que

$$\frac{x}{x+1}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1}=\frac{1}{n+1}.$$

Sendo assim, $\frac{1}{2015}$ é filho de $\frac{1}{2014}$, neto de $\frac{1}{2013}$, bisneto de $\frac{1}{2012}, \ldots$

9. $-\frac{23}{16}$.

10. Observe que $\frac{40}{6}$ é uma fração de inteiros e o denominador é diferente do zero, portante é um número racional, e está localizado entre o 6 e o 7 (*não no ponto médio*).

11. Observe que $-\frac{19}{4}$ é uma fração de inteiros, portanto é um número racional, equivalente a $-4,75$ e está localizado entre o -5 e o -4 (*não no ponto médio*).

12. Em cada item, basta construirmos frações equivalentes e de mesmo denominador.

a) $\frac{20}{6}\cdot\frac{3}{3}=\frac{60}{18}$ e $\frac{8}{3}\cdot\frac{6}{6}=\frac{24}{18}$, logo $\frac{20}{6}>\frac{8}{3}$.

b) $\frac{8}{11}\cdot\frac{40}{40}=\frac{320}{440}$ e $\frac{29}{40}\cdot\frac{11}{11}=\frac{319}{440}$, logo $\frac{8}{11}>\frac{29}{40}$.

c) $-\frac{7}{15}=-\frac{217}{465}$ e $\frac{15}{31}=-\frac{225}{465}$, logo $-\frac{7}{15}>-\frac{15}{31}$.

d) $-\frac{32}{9}=-\frac{608}{171}$ e $\frac{65}{19}=-\frac{585}{171}$, logo $-\frac{32}{9}<-\frac{65}{19}$.

13. Ele desceu $8,5$ metros, portanto está a $-8,5$ metros da superfície, e depois subiu $4,9$ metros ficando a $-8,5+4,9=-3,6$ metros da superfície.

14. É importante destacar que o conjunto dos racionais é denso nos números reais, ou seja, em qualquer intervalo aberto existem infinitos outros racionais.

a) Três exemplos: $1,3$, 2 e $2,567$.

b) Três exemplos: $-1,1$, $-1,24$ e $-1,789$.

c) Três exemplos: $-5,57$, $-5,5898$ e $-5,5986789$.

15. Basta efetuarmos a operação inversa, ou seja, $17,4-2,7=14,7$ km.

16. Primeiro, precisamos perceber que 4 horas e 30 minutos são equivalentes a $4,5$ horas. Agora, basta efetuarmos a divisão de $7,65$ por $4,5$ horas, o que resulta em

$$\frac{7,65}{4,5}=\frac{\frac{765}{100}}{\frac{45}{10}}=\frac{765}{100}\cdot\frac{10}{45}=\frac{17}{10}=1,7.$$

O valor pago por hora foi de um real e setenta centavos.

17. O valor será $\frac{1}{9}$. Ela trocava 10 palitos por 1 picolé com palito, então se subtrair um palito que foi deixado em relação ao que está sendo levado ficamos com 9. Esse é referente a $\frac{1}{9}$ do valor do picolé sem o palito.

18.

$$
\begin{aligned}
\frac{2^{98}+4^{50}-8^{34}}{2^{99}-32^{20}+2^{101}} &= \\
\frac{2^{98}+2^{100}-2^{102}}{2^{99}-2^{100}+2^{101}} &= \\
\frac{2^{98}\left(1+2^{2}-2^{4}\right)}{2^{99}\left(1-2^{1}+2^{2}\right)} &= \\
\frac{-11}{2\cdot 3} &= \\
-\frac{11}{6}.
\end{aligned}
$$

19. Observe que

$$
\begin{aligned}
0,1^2+0,2^2 &= \left(\frac{1}{10}\right)^2+\left(\frac{2}{10}\right)^2 \\
&= \frac{1}{100}+\frac{4}{100} \\
&= \frac{5}{100} \\
&= \frac{1}{20}.
\end{aligned}
$$

20.

a) 789.

b) 8.

c) 25.

21.

a)

$$
\begin{aligned}
x &= 0,333\ldots \\
10x &= 3,333\ldots \Rightarrow \\
9x &= 3
\end{aligned}
$$

Logo, $x=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

b)

$$
\begin{aligned}
x &= 0,121212\ldots \\
100x &= 12,121212\ldots \Rightarrow \\
99x &= 12
\end{aligned}
$$

Logo, $x=\frac{12}{99}=\frac{4}{33}$.

c)

$$
\begin{aligned}
x &= 6,555\ldots \\
10x &= 65,555\ldots \Rightarrow \\
9x &= 59
\end{aligned}
$$

Logo, $x=\frac{59}{9}$.

d)

$$
\begin{aligned}
x &= -0,666\ldots \\
10x &= -6,666\ldots \Rightarrow \\
9x &= -6
\end{aligned}
$$

Logo, $x=-\frac{6}{9}=-\frac{2}{3}$.

22.

$$
\begin{aligned}
\frac{3\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}{3\left(-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{3}{2}} &= \frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}{\frac{3}{9}-\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{-7/6} \\
&= -\frac{6}{7}.
\end{aligned}
$$

23.

$$
\begin{aligned}
1:\left(1+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{(1+1)^2}\right)^2}\right)^2 &= \\
1:\left(1+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{4}\right)^2}\right)^2 &= \\
1:\left(1+\frac{1}{\left(\frac{5}{4}\right)^2}\right)^2 &= \\
1:\left(1+\frac{16}{25}\right)^2 &= \\
1:\left(\frac{41}{25}\right)^2 &= \\
\frac{625}{1681}.
\end{aligned}
$$

24.

a)

$$
\begin{aligned}
x &= 4,7222\ldots \\
10x &= 47,222\ldots \\
100x &= 472,222\ldots \Rightarrow \\
90x &= 425
\end{aligned}
$$

Logo, $x=\frac{425}{90}=\frac{85}{18}$.

b)

$$\begin{aligned} x &= 1,8999\ldots \\ 10x &= 18,999\ldots \\ 100x &= 189,999\ldots \Rightarrow \\ 90x &= 171 \end{aligned}$$

Logo, $x = \dfrac{171}{90} = \dfrac{19}{10}$.

c)

$$\begin{aligned} x &= 1,2010101\ldots \\ 10x &= 12,010101\ldots \\ 1000x &= 1201,010101\ldots \Rightarrow \\ 990x &= 1189 \end{aligned}$$

Logo, $x = \dfrac{1189}{990}$.

25.

$$\begin{aligned} 5 \cdot \sqrt{\frac{2}{3} : \left\{ \left[\left(\frac{2}{9} + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{3} \right] : \frac{6}{5} \right\}} &= \\ 5 \cdot \sqrt{\frac{2}{3} : \left\{ \left[\frac{8+9}{36} - \frac{1}{3} \right] : \frac{6}{5} \right\}} &= \\ 5 \cdot \sqrt{\frac{2}{3} : \left\{ \left[\frac{17}{36} - \frac{1}{3} \right] : \frac{6}{5} \right\}} &= \\ 5 \cdot \sqrt{\frac{2}{3} : \left\{ \frac{17-12}{36} : \frac{6}{5} \right\}} &= \\ 5 \cdot \sqrt{\frac{2}{3} : \left\{ \frac{5}{36} : \frac{6}{5} \right\}} &= \\ 5 \cdot \sqrt{\frac{2}{3} : \left\{ \frac{5}{36} \cdot \frac{5}{6} \right\}} &= \\ 5 \cdot \sqrt{\frac{2}{3} : \frac{25}{216}} &= \\ 5 \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{216}{25}} &= \\ 5 \cdot \sqrt{\frac{144}{25}} &= \\ 5 \cdot \frac{12}{5} &= \\ 12. \end{aligned}$$

26. (Extraído da OBM − 2012)
Como letras iguais representam dígitos iguais, temos:

$$\frac{M \times A \times T \times E \times M}{A \times T \times I \times C \times A} = \frac{M^2 \times E}{I \times C \times A}.$$

Para que essa expressão tenha o maior valor, o numerador deve ser formado pelos maiores dígitos (com $M > E$) e o denominador deve ser formado pelos menores. Logo, $M = 9$, $E = 8$ e $A \cdot I \cdot C = 3 \cdot 2 \cdot 1$. Portanto, a expressão resulta em

$$\begin{aligned} \frac{M^2 \times E}{I \times C \times A} &= \frac{9^2 \times 8}{6} \\ &= 108. \end{aligned}$$

Resposta: **Letra C**.

27. Usando o método já apresentado no exercício 5, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \frac{1}{6} &= \frac{1}{t} \\ \frac{2t}{6t} + \frac{t}{6t} &= \frac{6}{6t} \\ 3t &= 6 \\ t &= 2 \text{ horas}. \end{aligned}$$

28. (Adaptado do da OBM)
Quando Ana andar $3/4$ da escada, Beatriz terá andado $1/4$ da mesma. Isso significa que Ana é três vezes mais rápida para descer do que Beatriz para subir. Quando Ana andar mais $1/4$ da escada e terminar, Beatriz terá andado mais um terço disso, que é $1/12$. Assim, Beatriz andou $4/12$ da escada, então ainda terá que subir $8/12 = 2/3$ dela.

29.

a) $0,000001$.

b) 4.

c) $80 \cdot \dfrac{125}{8} = 1250$.

d) $\dfrac{1}{3} \cdot 0,09 = 0,03$.

e) $200 \cdot \dfrac{256}{10000} = 5,12$.

30.

a) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}$.

b) 2^6

c) -2^{45}.

d) 10^6.

e) 2^{13}.

31. (Extraído da OBM − 2012)

$$\begin{aligned}\frac{1}{5^{12}} &= \frac{1}{5^{12}}\cdot\frac{2^{12}}{2^{12}}\\ &= \frac{2^{12}}{10^{12}}\end{aligned}$$

Como $2^{12} = 4096$, o primeiro dígito não nulo após a vírgula é 4. Resposta C.

32. (Extraído da OBM)
Serão necessárias

$$15\cdot\frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{6}} = 4 \text{ garrafas.}$$

33. (Extraído do Clube de Matemática da OBMEP)
O numerador e o denominador são múltiplos de 3, logo a fração original é equivalente a

$$\frac{1\cdot 2+2\cdot 4\cdot 2+4\cdot 8\cdot 4+7\cdot 14\cdot 7}{1\cdot 5+2\cdot 2\cdot 10+4\cdot 4\cdot 20+7\cdot 7\cdot 35}.$$

Agora, todos no numerador são múltiplos de 2 e no denominador de 5, colocando-os em evidência, ficaremos com

$$\frac{2\cdot(1+2\cdot 2\cdot 2+4\cdot 4\cdot 4+7\cdot 7\cdot 7)}{5\cdot(1+2\cdot 2\cdot 2+4\cdot 4\cdot 4+7\cdot 7\cdot 7)}.$$

Simplificando os fatores $(1+2\cdot 2\cdot 2+4\cdot 4\cdot 4+7\cdot 7\cdot 7)$, ficaremos com $\dfrac{2}{5}$.

34.

$F_5 = \{0/1, 1/5, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, 4/5, 1/1\}$.

35. Usando a propriedade dada no enunciado, temos $7a - 5b = \pm 1$. Veja que $7a$ deve deixar resto 1 ou 6 na divisão por 5. Dentre os valores possíveis de a no conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, 7\}$, apenas 2 e 3 satisfazem tal condição. Se $a = 2$, temos $b = 3$. Se $a = 3$, teremos $b = 4$. Entretanto, como $\dfrac{2}{3} < \dfrac{5}{7} < \dfrac{3}{4}$, a fração procurada é $\dfrac{2}{3}$.

36. Veja que

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot(0,666\ldots)} &= \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\frac{6}{9}}\\ &= \sqrt{\frac{1}{6^2\cdot 9}}\\ &= \frac{1}{18}\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^0-\frac{1}{1,333\ldots}} &= \sqrt{1-\frac{1}{12/9}}\\ &= \sqrt{1-\frac{9}{12}}\\ &= \sqrt{\frac{3}{12}}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Assim, o valor da expressão procurada é:

$$\begin{aligned}\frac{1}{18}+\frac{1}{2} &= \frac{10}{18}\\ &= \frac{5}{9}.\end{aligned}$$

37. (Extraído da Vídeo Aula)
Vamos desenvolver as operações observação a sequência dos parênteses e colchetes e ainda das operações

a)
$$\begin{aligned}\left[\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^{-3}\cdot\frac{2}{3}}+\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^0-\frac{1}{\frac{4}{3}}}\right]^{-2} &=\\ \left[\sqrt{216\cdot\frac{2}{3}}+\sqrt{1-\frac{3}{4}}\right]^{-2} &=\\ \left[\sqrt{144}+\sqrt{\frac{1}{4}}\right]^{-2} &=\\ \left[12+\frac{1}{2}\right]^{-2} &=\\ \left[\frac{25}{2}\right]^{-2} &= \frac{4}{625}.\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\sqrt{1,777\ldots}+\sqrt{0,444\ldots}-(0,555\ldots)^{-1} &=\\ \sqrt{\frac{16}{9}}+\sqrt{\frac{4}{9}}-\left(\frac{5}{9}\right)^{-1} &=\\ \frac{4}{3}+\frac{2}{3}-\frac{9}{5} &=\\ 2-\frac{9}{5} &= \frac{1}{5}.\end{aligned}$$

38. (Extraído da Olimpíada do Cone Sul)
A fração $\frac{a}{b}$ é irredutível se e só se $\frac{a}{b-a}$ é irredutível (se a e b tem um fator comum, então a e $b-a$ têm um fator comum, e reciprocamente). O problema se transforma em achar o menor valor de n tal que as frações sejam todas irredutíveis. Observe que as frações anteirores possuem

a forma $\dfrac{a}{n+a+2}$ e pelo critério anterior bastaria que $\dfrac{a}{n+2}$ fosse irredutível. Tendo isso em mente, se $n+2$ é um primo maior que 91, todas as frações serão irredutíveis. Assim, um valor possível de n é 95 pois $n+2 = 97$ é um número primo. Verifiquemos que é o menor possível.

i) Se $n+2 < 97$ e $n+2$ é par, então n é par e há frações redutíveis como, por exemplo, $\frac{20}{n+2}$.

ii) Se $19 \leq n+2 \leq 91$, obviamente há uma fração redutível.

iii) Se $n+2 < 19$, então $n+2$ tem um múltiplo entre 19 e 91 e, portanto, há uma fração redutível.

iv) Se $n+2 = 93 = 3.31$, então $\frac{31}{n+2}$ é redutível.

v) Se $n+2 = 95 = 5.19$, então $\frac{19}{n+2}$ é redutível.

Logo, o valor mínimo de $n+2$ é 97, que corresponde a $n = 95$.

39. (Extraído da OBMEP − 2012)
Seja m o número de meninas e h o número de meninos. Do enunciado concluímos que

$$\frac{m}{h} = 0,48 = \frac{48}{100} = \frac{24}{50} = \frac{12}{25}.$$

Essa última é a fração equivalente com menores numerador e denominador inteiros. Daí, podemos concluir que os menores números para são $h = 12$ e $m = 25$, e para essa situação $h+m = 37$. O que está na **letra b**.

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com