Cônicas

Hipérbole

3° ano E.M.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

Cônicas
Hipérbole

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. O ponto que representa o centro da hipérbole de equação $\dfrac{(x+1)^2}{4} - \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1$ é:

a) $(-1, -2)$.

b) $(-1, 2)$.

c) $(1, -2)$.

d) $(1, 2)$.

e) $(0, 0)$.

Exercício 2. A distância focal da hipérbole de equação $\dfrac{(x+12)^2}{16} - \dfrac{(y-7)^2}{9} = 1$ é:

a) 8.

b) 10.

c) 12.

d) 14.

e) 16.

Exercício 3. O conjunto de pontos cujo módulo da diferença das distâncias a dois pontos fixos é constante é uma:

a) circunferência.

b) elipse.

c) hipérbole.

d) parábola.

Exercício 4. Seja $2a$ a medida do eixo real e $2b$ a medida do eixo imaginário da hipérbole de equação $\dfrac{(y-2)^2}{8} - \dfrac{(x+1)^2}{32} = 1$, então, $2a + 2b$ é:

a) $8\sqrt{2}$.

b) $10\sqrt{2}$.

c) $12\sqrt{2}$.

d) $14\sqrt{2}$.

e) $15\sqrt{2}$.

Exercício 5. A equação da hipérbole com centro em $(3, -1)$, eixo focal vertical, eixo real igual a 8 e eixo imaginário igual a 4 é:

a) $\dfrac{(y+1)^2}{16} - \dfrac{(x-3)^2}{4} = 1$.

b) $\dfrac{(y-1)^2}{16} - \dfrac{(x+3)^2}{4} = 1$.

c) $\dfrac{(y+1)^2}{4} - \dfrac{(x+3)^2}{16} = 1$.

d) $\dfrac{(y-1)^2}{4} - \dfrac{(x-3)^2}{16} = 1$.

e) $\dfrac{(y-1)^2}{4} - \dfrac{(x+3)^2}{4} = 1$.

Exercício 6. Determine a equação da hipérbole cujo centro é $(1, -4)$, eixo real mede 12, eixo imaginário mede 8 e possui eixo focal horizontal.

Exercício 7. Os pontos $(2, 0)$ e $(-2, 0)$ são vértices de uma hipérbole cujos focos são $(3, 0)$ e $(-3, 0)$. Determine a equação desta hipérbole.

Exercício 8. A excentricidade da hipérbole $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{(x-1)^2}{16} = 1$ é:

a) $\dfrac{5}{2}$.

b) $\dfrac{5}{3}$.

c) $\dfrac{5}{4}$.

d) $\dfrac{5}{6}$.

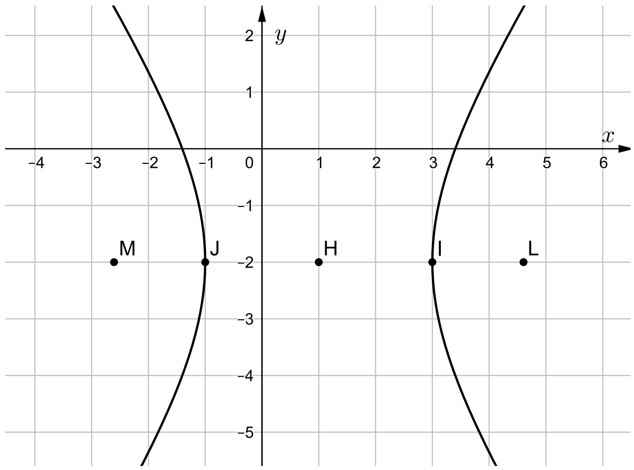
e) 5.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 9. Quantos são os pontos de interseção entre a reta $r : y + x + 1 = 0$ e a hipérbole $\alpha : \dfrac{y^2}{4} - x^2 = 1$.

Exercício 10. Determine as equações das retas assíntotas da hipérbole $\alpha : 9x^2 - 4y^2 = 36$.

Exercício 11. Determine a equação da hipérbole na figura abaixo, sendo H seu centro, J e I seus vértices e $M(1 - \sqrt{13}, -2)$ e $L(1 + \sqrt{3}, -2)$ seus focos.



Exercício 12. A equação da hipérbole na figura abaixo, cujos focos são os pontos R e Q e os vértices são os pontos N e P, é:

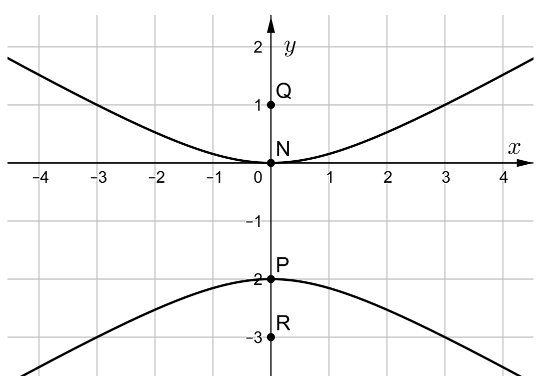
a) $(y+1)^2 - \dfrac{x^2}{3} = 1.$

b) $(y-1)^2 - \dfrac{x^2}{3} = 1.$

c) $(y+1)^2 - \dfrac{x^2}{2} = 1.$

d) $(y-1)^2 - \dfrac{(x-1)^2}{3} = 1.$

e) $(y+1)^2 - \dfrac{(x-1)^2}{3} = 1.$



Exercício 13. Determine o raio da circunferência de centro $O(0,-2)$ e tangente aos ramos da hipérbole de equação $x^2 - y^2 = 4$.

Exercício 14. Para que valores reais de m a reta $y = mx$ não intersecta a hipérbole $y^2 - x^2 = 9$?

a) $[-1, 1]$.

b) $[-2, 2]$.

c) $[-3, 3]$.

d) $[-4, 4]$.

e) $[-5, 5]$.

Exercício 15. Uma hipérbole tem centro na origem, vértice em $(2a, 0)$ e extremidade do eixo imaginário em $(0, a)$, com $a > 0$. A área do retângulo cujos pontos médios dos lados são os vértices e as extremidades do eixo imaginário é:

a) a^2.

b) $2a^2$.

c) $4a^2$.

d) $8a^2$.

e) $16a^2$.

Exercício 16. Determine os pontos de interseção entre a hipérbole de equação $x^2 - 4y^2 = 4$ e a elipse de equação $4x^2 + 9y^2 = 36$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 17. Determine a equação da reta que passa por um dos vértices da curva definida por $4y^2 + 8y - x^2 = 4$ formando um ângulo de 45^o como o eixo horizontal.

Exercício 18. Dada a cônica $\alpha : x^2 - y^2 = 1$, qual das retas a seguir é perpendicular a α no ponto $P(2, \sqrt{3})$?

a) $y = \sqrt{3}(x-1)$.

b) $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$.

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$.

d) $-\dfrac{\sqrt{3}}{5}(x-7)$.

e) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-4)$.

Exercício 19. O lugar geométrico dos pontos (x, y), tais que

$$\left| \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} - \sqrt{(x+2)^2 + (y+6)^2} \right| = \sqrt{10},$$

é uma:

a) reta.

b) circunferência.

c) parábola.

d) elipse.

e) hipérbole.

Exercício 20. Sabendo que

$$9y^2 - 16x^2 - 144y + 224x - 352 = 0$$

é a equação de uma hipérbole, calcule sua distância focal.

Respostas e Soluções.

1. B.

2. Se $a^2 = 16$ e $b^2 = 9$, então $a = 4$ e $b = 3$. Como $c^2 = a^2 + b^2$, então $c = 5$, segue que a distância focal é 10. Resposta B.

3. C.

4. Na equação, temos $a^2 = 8$ e $b^2 = 32$, donde chegamos a $a = 2\sqrt{2}$ e $b = 4\sqrt{2}$. Portanto, $2a + 2b = 4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$. Resposta C.

5. Se os eixos real e imaginário medem 8 e 4, respectivamente, então $a = 4$ e $b = 2$ e, consequentemente, $a^2 = 16$ e $b^2 = 4$. Portanto, sua equação é $\dfrac{(y+1)^2}{16} - \dfrac{(x-3)^2}{4} = 1$. Resposta A.

6. Temos $a = 6$ e $b = 4$. Como o eixo focal é horizontal, chegamos a $\dfrac{(x-1)^2}{36} - \dfrac{(y+4)^2}{16} = 1$.

7. Temos que os eixos real e focal medem, respectivamente, 4 e 6. Assim, $a = 2$, $c = 3$ e, consequentemente, $b = \sqrt{5}$. Como o centro é a origem, a equação da hipérbole é $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$.

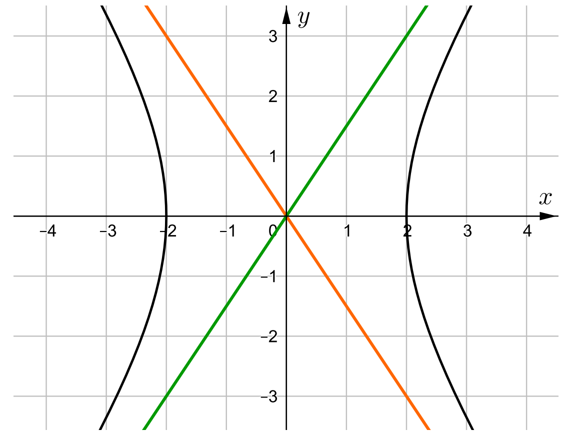
8. Como $a = 3$ e $b = 4$, então $c^2 = 9 + 16$, segue que $c = 5$. Sendo assim, a excentricidade da elipse é $\dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{3}$. Resposta B.

9. Temos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{y^2}{4} - x^2 &= 1 \\
y^2 - 4x^2 &= 4 \\
(-x-1)^2 - 4x^2 &= 4 \\
x^2 + 2x + 1 - 4x^2 &= 4 \\
3x^2 - 2x + 3 &= 0 \\
x &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 36}}{6}.
\end{aligned}
$$

Como as raízes da equação não são reais, não existe ponto de interseção entre a reta e a hipérbole.

10. Podemos escrever a equação da hipérbole como $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$, donde chegamos a $a = 2$ e $b = 3$. Sendo assim, uma das assíntotas passará pelos pontos $(2,3)$ e $(-2,-3)$, ou seja, $3x - 2y = 0$; e a outra passará pelos pontos $(-2,3)$ e $(2,-3)$, ou seja, $3x + 2y = 0$.

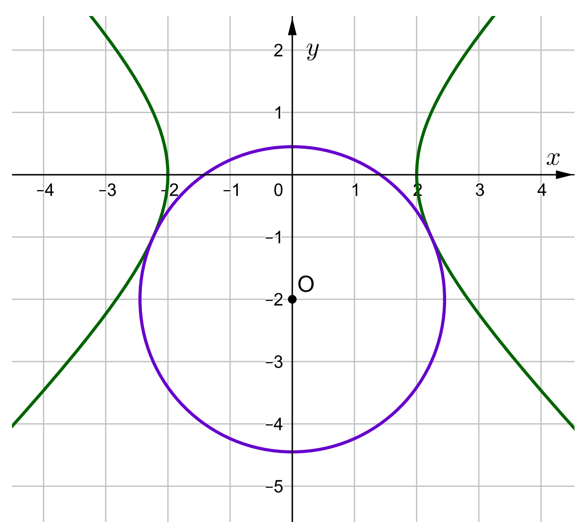


11. Como $a = 2$ e $c = \sqrt{13}$, então $b = 3$. Sendo assim, sua equação é $\dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{(y+2)^2}{9} = 1$.

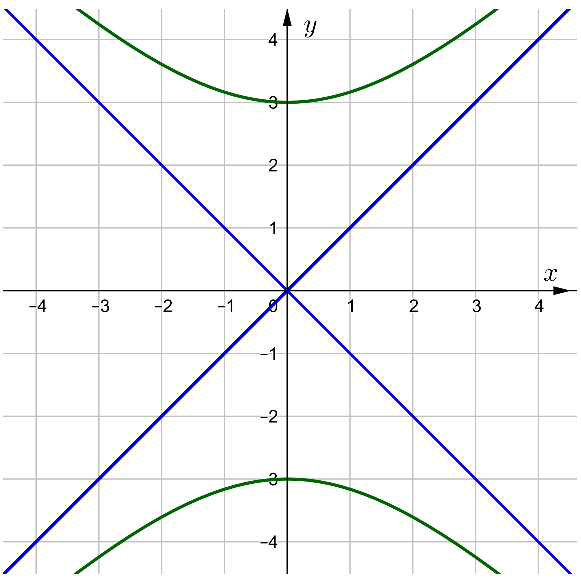
12. Temos centro $(0,-1)$, $a = 1$, $c = 2$ e, consequentemente, $b = \sqrt{3}$. Portanto, sua equação é $(y+1)^2 - \dfrac{x^2}{3} = 1$. Resposta A.

13. A equação da circunferência é $x^2 + (y+2)^2 = r^2$, sendo r a medida do seu raio. Subtraindo esta equação da equação da hipérbole, chegamos a $2y^2 + 4y - r^2 + 8 = 0$, que é uma equação quadrática. Como o centro da circunferência está sobre o eixo imaginário da hipérbole, os dois pontos de tangência terão a mesma ordenada. Sendo assim:

$$
\begin{aligned}
\Delta &= 0 \\
16 - 8(-r^2 + 8) &= 0 \\
r^2 - 8 &= -2 \\
r &= \sqrt{6}.
\end{aligned}
$$



14. Podemos escrever a equação da hipérbole como $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{9} = 1$. Assim, como $a = b = 3$, as equações das assíntotas são $y = x$ e $y = -x$, com $m_1 = 1$ e $m_2 = -1$. Sendo assim, além das assíntotas, as retas que não intersectam a hipérbole devem estar "entre"estas assíntotas, ou seja, $m \in [-1, 1]$. Resposta A.

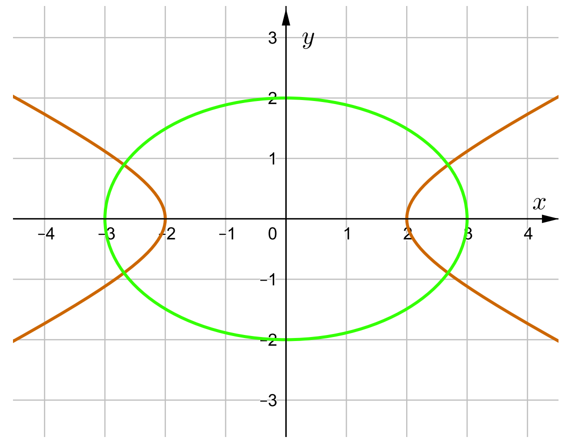


15. A base do retângulo mede $4a$ e a altura mede $2a$, ou seja, sua área é $4a \cdot 2a = 8a^2$. Resposta D.

16. Vamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 & = & 4 \\ 4x^2 + 9y^2 & = & 36. \end{cases}$$

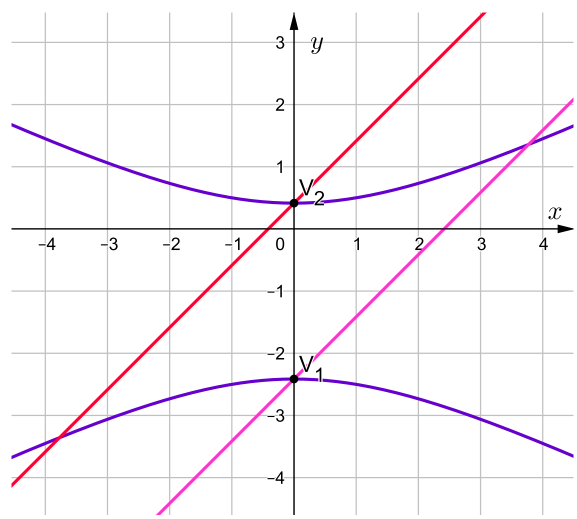
Multiplicando a primeira equação por (-4) e somando as equações, chegamos a $25y^2 = 20$, donde $y = \pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. Substituindo este resultado em uma das equações, encontramos $x = \pm\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$. Portanto, os pontos de interseção entre as cônicas são $\left(\dfrac{6\sqrt{5}}{5}, \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(\dfrac{6\sqrt{5}}{5}, -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(-\dfrac{6\sqrt{5}}{5}, \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ e $\left(-\dfrac{6\sqrt{5}}{5}, -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.



17. (Extraído do IME) Temos:

$$\begin{array}{rcl} 4y^2 + 8y - x^2 & = & 4 \\ 4y^2 + 8y + 4 - x^2 & = & 8 \\ 4(y+1)^2 - x^2 & = & 8 \\ \dfrac{(y+1)^2}{2} - \dfrac{x^2}{8} & = & 1. \end{array}$$

Como o centro da hipérbole está em $(0, -1)$ e $a = \sqrt{2}$, seus vértices estão em $V_1(-1 - \sqrt{2})$ e $V_2(-1 + \sqrt{2})$. Assim, as retas que contêm seus vértices e possuem coeficiente angular igual a 1 são $y = x - 1 - \sqrt{2}$ e $y = x - 1 + \sqrt{2}$.



18. (Extraído do ITA) Vamos encontrar inicialmente a equação da reta t tangente à hipérbole no ponto P, ou seja, $t : y = mx + (\sqrt{3} - 2m)$. Substituindo a equação de t na hipérbole, chegamos a:

$$\begin{array}{rcl} x^2 - y^2 & = & 1 \\ x^2 - (mx + \sqrt{3} - 2m)^2 & = & 1 \\ x^2 - mx^2 - 2mx(\sqrt{3} - 2m) - (3 - 4\sqrt{3}m + 4m^2) & = & 1 \\ (1 - m^2)x^2 - (2\sqrt{3}m - 4m^2)x - (4 - 4\sqrt{3}m + 4m^2) & = & 0. \end{array}$$

Como t é tangente à hipérbole, temos:

$$\begin{aligned}
\Delta &= 0\\
(2\sqrt{3}m - 4m^2)^2 + 4(1-m^2)(4-4\sqrt{3}+4m^2) &= 0\\
12m^2 - 16\sqrt{3}m + 16 &= 0\\
3m^2 - 4\sqrt{3}m + 4 &= 0\\
m &= \frac{2\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$

Agora, vamos determinar a equação r perpendicular a t no ponto P. Se $m = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, então o coeficiente angular de r é $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Chegamos, portanto, a $r : y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + 2\sqrt{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-4)$. Resposta E.

19. (Extraído da Escola Naval) O lugar geométrico dos pontos cujo módulo da diferença a dois pontos fixos (focos) é constante é uma hipérbole. Resposta E.

20. (Extraído do ITA) Temos:

$$\begin{aligned}
9y^2 - 16x^2 - 144y + 224x - 352 &= 0\\
9(y-8)^2 - 16(x-7)^2 = 144\\
\frac{(y-8)^2}{16} - \frac{(x-7)^2}{9} &= 1.
\end{aligned}$$

Como $a = 4$ e $b = 3$, então $c = 5$, segue que a distância focal é $2 \cdot 5 = 10$.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com