Módulo de Razões e Proporções

Números Diretamente e Inversamente Proporcionais

7° ano E.F.

Professores Tiago Miranda e Cleber Assis

Portal da Matemática
OBMEP

Razões e Proporções
Números Diretamente e Inversamente Proporcionais

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Numa festa há 518 pessoas. Sabe-se que para cada 6 homens há 8 mulheres.

a) Quantas mulheres há na festa?

b) Quantos homens há na festa?

Exercício 2. Uma máquina X pode terminar um trabalho em 30 horas. O mesmo seria feito pela máquina Y em 35 horas. Se X trabalha apenas 18 horas e depois quebra, devendo o restante do trabalho ser feito por Y, quantas horas ficará Y trabalhando para cumprir o feito?

Exercício 3. Uma torneira pode encher um tanque em 9 horas e outra pode fazer o mesmo serviço em 12 horas. Podemos juntar a essas duas torneiras uma terceira, todas trabalhando ao mesmo tempo, e o tanque ficará cheio em 4. Qual o tempo que a terceira levaria trabalhando sozinho para encher todo o tanque?

Exercício 4. Cinco torneiras idênticas enchem um tanque em 144 minutos.

a) Quantas dessas torneiras são necessárias para encher o tanque em uma hora e meia?

b) Houve problemas com n torneiras, elas não poderão mais ser usadas, e assim o tempo para se encher o tanque com todas as demais em pleno funcionamento mudou para 360 minutos. Qual o valor de m?

Exercício 5. Rodrigo e Júnior trabalham carregando caminhões. Para carregar um caminhão, Rodrigo leva 20 minutos. Juntos, conseguem fazê-lo em 15 minutos. Em quanto tempo Júnior, sozinho, é capaz de carregar um caminhão?

Exercício 6. Arnaldo, Bráulio e Carlos participarão de uma corrida de rua. Depois de algumas semanas, eles estavam discutindo suas estratégias. Arnaldo corre a primeira metade da distância total da corrida a $9km/h$ e a segunda metade a $11km/h$. Já Bráulio corre um terço da distância a $9km/h$, o segundo terço a $10km/h$ e, por fim, o último terço a $11km/h$. Carlos usa uma estratégia diferente dos dois primeiros, ele corre metade do seu tempo total de corrida a $9km/h$ e a metade final do tempo a $11km/h$. Determine a ordem entre os tempos totais de Arnaldo, Bráulio e Carlos de chegada ao final da corrida.

Exercício 7. Uma empresa de impressões digitais tem uma copiadora A que imprime 500 páginas em oito minutos. O dono da empresa decide comprar outra máquina copiadora B mais moderna e observa que as duas máquinas trabalhando juntas imprimem 500 páginas em dois minutos. Em quanto tempo a máquina B imprime 500 páginas?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 8. Sabe-se que a distância real, em linha reta, de Recife para Vitória de Santo Antão é igual a 45 quilômetros. Um estudante do IFPE, ao analisar um mapa, constatou com sua régua que a distância entre essas duas cidades era de 5 centímetros. De acordo com o texto, qual a escala do mapa observado pelo estudante?

Exercício 9. Numa fazenda há 5 cavalos que consomem 300 kg de ração em 6 dias. Suponha que todos eles consomem por dia a mesma quantidade de ração. Com apenas 240 kg de ração, 12 cavalos iguais aos dessa fazenda seriam alimentados durante quantos dias?

Exercício 10. Duas velas homogêneas e de comprimentos iguais são acesas simultaneamente. A primeira tem um tempo de queima de 4 horas e a segunda de 6 horas. Após certo tempo, ambas foram apagadas ao mesmo tempo. Observou-se que o resto de uma tinha o dobro do resto da outra. Por quanto tempo ficaram acesas ?

Exercício 11. Uma biblioteca precisa encadernar alguns livros. Uma oficina pode encadernar estes livros em 30 dias, outra em 45 dias. Em quantos dias estas oficinas podem cumprir a tarefa se trabalharam ao mesmo tempo?

Exercício 12. Um pequeno barco a vela, com 7 tripulantes, deve atravessar o oceano em 42 dias. Seu suprimento de água potável permite a cada pessoa dispor de $3,5$ litros de água por dia (e é o que os tripulantes fazem). Após 12 dias de viagem, o barco encontra 3 náufragos numa jangada e os acolhe. Pergunta-se:

a) Quantos litros de água por dia caberão agora a cada pessoa se a viagem prosseguir como antes?

b) Se os 10 ocupantes de agora continuarem consumindo $3,5$ litros de água cada um, em quantos dias, no máximo, será necessário encontrar uma ilha onde haja água?

Exercício 13. Um dos grandes problemas enfrentados nas rodovias brasileiras é o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionado para o tráfego dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além disso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão do veículo, causas frequentes de acidentes. Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão pode carregar, no máximo, 1500 telhas ou 1200 tijolos. Considerando esse caminhão carregado com 900 telhas, quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados à carga de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?

Exercício 14. Um automóvel pode andar, sem se abastecer e consumo constante, durante 360 minutos. Tendo saído com um furo no tanque de combustível, que escoa uma quantidade de combustível numa vazão constante, ele andou apenas 144 minutos. Qual a fração da quantidade de combustível que escoaria caso ficasse 15 minutos parado?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 15. Em uma padaria, 10 litros de uma mistura de café com leite, em quantidades iguais, é vendida no café da manhã. Para obter um teor de $\frac{4}{5}$ de café e $\frac{1}{5}$ de leite, quantos litros de qual líquido deve-se acrescentar aos 10 litros da mistura?

Exercício 16. Um grupo de pessoas foi dividido em duas metades. Na primeira metade, a razão do número de homens para o mulheres é de 1 para 2, na segunda metade, a razão do número de mulheres para o de homens é de 2 para 3. No grupo todo, qual a razão do número de mulheres para o de homens?

Exercício 17. Três carros partem de uma cidade A ao mesmo tempo e percorrem um caminho fechado composto por três segmentos de reta AB, BC e CA. As velocidades do primeiro carro sobre esses segmentos são 12, 10 e 15 quilômetros por hora, respectivamente. As velocidades do segundo carro são 15, 15 e 10 quilômetros por hora, respectivamente. Finalmente, as velocidades do terceiro carro são 10, 20 e 12 quilômetros por hora, respectivamente. Encontre o valor do ângulo $\angle ABC$, sabendo que todos os três carros terminam na cidade A ao mesmo tempo.

Exercício 18. Dois recipientes, R_1 e R_2, contêm a mesma quantidade de misturas de álcool e água, nas respectivas proporções: $3:5$, em R_1 e $2:3$ em R_2. Juntando-se em um terceiro recipiente os conteúdos de R_1 e R_2, qual a proporção de álcool e água nesta mistura?

Exercício 19. Usando uma balança de dois pratos, verificamos que 4 abacates pesam o mesmo que 9 bananas e que 3 bananas pesam o mesmo que 2 laranjas. Se colocarmos 9 laranjas num prato da balança, quantos abacates deveremos colocar no outro prato, para equilibrar a balança?

Exercício 20. Rosa resolveu distribuir $R\$250,00$ para seus sobrinhos, dando a mesma quantia inteira (sem centavos) para cada um e percebeu que sobrariam $R\$10,00$. Então, ela pensou em diminuir em $R\$1,00$ a quantia de cada um e descobriu que sobrariam $R\$22,00$. Por fim, ela resolveu distribuir apenas $R\$240,00$. Quanto ganhou cada sobrinho?

Respostas e Soluções.

1. Sendo h o número de homens e m o de mulheres, com $h + m = 518$, podemos estabelecer a proporção

$$\frac{h}{6} = \frac{m}{8} = \frac{h+m}{6+8}$$
$$\frac{h}{6} = \frac{m}{8} = \frac{518}{14}$$

$$\frac{h}{6} = \frac{518}{14} \qquad h = 222$$

$$\frac{m}{8} = \frac{518}{14} \qquad m = 296.$$

2. Buscamos as horas que Y trabalhará para findar o trabalho começado por X. Em uma hora, X cumpre $\frac{1}{30}$ de todo o trabalho e Y faz $\frac{1}{35}$. Depois de 18 horas, foi feito $\frac{18}{30} = \frac{3}{5}$ do total. Para cumprir os $\frac{2}{5}$ restantes, Y levará $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{35}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{35}{1} = 14$ horas.

3. (Extraído do Exame do CM Manaus)
A primeira torneira, em uma hora de funcionamento, enche $\frac{1}{9}$ do tanque, a segunda, no mesmo tempo, enche $\frac{1}{12}$, e a terceira fica com $\frac{1}{t}$. Juntas, em uma hora, terão enchido $\frac{1}{4}$. Assim, podemos escrever que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{t} &= \frac{1}{4}\\
\frac{1}{t} &= \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{12}\\
\frac{1}{t} &= \frac{9-4-3}{36}\\
\frac{1}{t} &= \frac{2}{36}\\
t &= 18 \text{ horas.}
\end{aligned}$$

4.

a) Como 5 torneiras enchem o tanque em 144 minutos, então uma delas trabalhando sozinha o encherá em $144 \cdot 5 = 720$ minutos.

b) Para encher o tanque em 360 minutos precisaremos de $\frac{720}{360} = 2$ torneiras. Logo, houve problemas com 3 torneiras.

5. (Extraído do Exame do CM Salvador)
Rodrigo, em um minuto, carrega $\frac{1}{20}$ do tanque e Júnior, no mesmo tempo, carrega $\frac{1}{x}$. Juntos, em um minuto, terão enchido $\frac{1}{15}$ do caminhão. Assim, podemos escrever que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{20} + \frac{1}{x} &= \frac{1}{15}\\
\frac{1}{x} &= \frac{1}{15} - \frac{1}{20}\\
\frac{1}{x} &= \frac{4-3}{60}\\
x &= 1 \text{ hora.}
\end{aligned}$$

6. (Extraído do BQ OBMEP $-$ 2016)
Chamaremos os tempos, medidos em horas, de Arnaldo, Bráulio e Carlos de t_A, t_B e t_C, respectivamente. Seja $6d$ a distância total da corrida, medida em quilômetros. Como Carlos corre metade do tempo a $9km/h$ e metade a $11km/h$, então

$$6d = 9 \cdot \frac{t_C}{2} + 11 \cdot \frac{t_C}{2} = 10 \cdot t_C.$$

Com isto, podemos montar equações e comparar os três tempos.

$$\begin{aligned}
t_A &= \frac{3d}{9} + \frac{3d}{11}\\
&= \frac{600d}{990}\\
t_B &= \frac{2d}{9} + \frac{2d}{10} + \frac{2d}{11}\\
&= \frac{598d}{990}\\
t_C &= \frac{6d}{10}\\
&= \frac{594d}{990}.
\end{aligned}$$

Concluímos que $t_C < t_B < t_A$, ou seja, o tempo de Carlos é menor que o de Bráulio que, por sua vez, é menor que o de Arnaldo.

7. (Adaptado do vestibular da UEG (GO) $-$ 2014)
Em um minuto, a primeira máquina faz a proporção de $\frac{1}{8}$ do trabalho, a segunda faz $\frac{1}{t}$ e as duas juntas fazem $\frac{1}{2}$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8} + \frac{1}{t} &= \frac{1}{2}\\
\frac{t+8}{8t} &= \frac{4t}{8t}\\
3t &= 8\\
t &= 2 \text{ minutos e 40 segundos.}
\end{aligned}$$

8. (Adaptado do vestibular do IFPE $-$ 2015)
A escala é a razão do comprimento no mapa pelo comprimento real, ambos em centímetros. Sendo assim, ficamos com

$$\frac{5}{4500000} = 1 : 900000.$$

9. (Adaptado do vestibular do IFPE − 2015)
Se 5 cavalos que consomem 300 kg de ração em 6 dias, então 1 cavalo consome 60kg em 6 dias, e ainda temos que 1 cavalo consome 10kg em 1 dia. Assim, ficamos 12 cavalos consumindo 120kg em 1 dia e 12 cavalos consumindo 240kg em 2 dias.

10. (Adaptado do vestibular da UNIFOR (CE) − 2014)
Suponhamos, sem perda de generalidade, que o tamanho das velas seja igual a 12 cm. A proporção de queima da primeira vela é de $\dfrac{12}{4} = 3$ cm/h e a segunda é $\dfrac{12}{6} = 2$ cm/h. Depois de t horas a primeira mede $12 - 3t$ e a segunda $12 - 4t$. Queremos o tempo tal que $2(12 - 3t) = 12 - 2t$, isso gera $4t = 12$ e $t = 3$ horas.

11. Uma oficina pode encadernar $\dfrac{1}{30}$ de todos os livros por dia e outra pode encadernar $\dfrac{1}{45}$ de todos os livros por dia. Logo, trabalhando juntas, elas pode encadernar

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{45} = \frac{45+30}{30 \cdot 45} = \frac{75}{45 \cdot 30} = \frac{1}{18}.$$

de todos os livros por dia. Portanto, elas precisam de 18 dias.

12. Aplicado uma regra de três simples observando as grandezas inversamente proporcionais (consumo *vs* quantidade de pessoas), temos:

a) a quantidade de $7 \cdot 3,5 = 24,5$ litros por dia para todos, ou seja, $2,45$ litros para cada.

b) Restaria água para 30 dias de viagem para 7 pessoas, com os 3 novos devemos fazer

$$\begin{aligned} \frac{7}{10} &= \frac{x}{30} \\ x &= 21 \text{ dias.} \end{aligned}$$

13. (Adaptado do ENEM − 2013)
A razão entre as quantidades de telhas e tijolos é $\dfrac{1500}{1200} = \dfrac{5}{4}$. Como o caminhão já recebeu 900 telhas, vamos verificar a quantidade equivalente de tijolos. Assim, $\dfrac{5}{4} = \dfrac{900}{720}$, segue que 900 telhas equivalem a 720 tijolos, faltando, para carga máxima, $1200 - 720 = 480$ tijolos.

14. (Adaptado do vestibular da UNIFOR (CE) − 2015)
Em um minuto, ele consumiu $\dfrac{1}{360}$ do total. O furo reduziu a taxa de uso para $\dfrac{1}{t}$ e juntos fizeram $\dfrac{1}{144}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{1}{360} + \frac{1}{t} &= \frac{1}{144} \\ \frac{1}{t} &= \frac{1}{144} - \frac{1}{360} \\ \frac{1}{t} &= \frac{5-2}{720} \\ \frac{1}{t} &= \frac{1}{240} \\ t &= 240. \end{aligned}$$

Assim, o tanque ficará vazio em 240 minutos do carro parado. Em 15 minutos, houve o gasto de $\dfrac{15}{240} = \dfrac{1}{16}$ da quantidade de combustível no tanque.

15. (Adaptado do vestibular da UNIFOR (CE) − 2014)
Na mistura inicial há 5 litros de café e 5 litros de leite. Como queremos a quantidade de café seja maior do que a de leite, portanto, devemos acrescentar mais café. Assim a proporção fica

$$\begin{aligned} \frac{5+x}{10+x} &= \frac{4}{5} \\ 25 + 5x &= 40 + 4x \\ x &= 15 \text{ litros de café.} \end{aligned}$$

16. (Adaptado do Tutor Brasil)
Seja H_i homens e M_i mulheres num grupo $i \in \{1,2\}$ de $x = H_i + M_i$ pessoas. Do primeiro grupo temos:

$$\begin{aligned} \frac{H_1}{1} &= \frac{M_1}{2} \\ \frac{H_1+M_1}{1+2} &= \frac{H_1}{1} \\ H_1 &= \frac{x}{3} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{H_1}{1} &= \frac{M_1}{2} \\ \frac{H_1+M_1}{1+2} &= \frac{M_1}{2} \\ M_1 &= \frac{2x}{3} \end{aligned}$$

No segundo há:

$$\begin{aligned} \frac{H_2}{2} &= \frac{M_2}{3} \\ \frac{H_2+M_2}{2+3} &= \frac{H_2}{2} \\ H_2 &= \frac{2x}{5} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{H_2}{2} &= \frac{M_2}{3} \\ \frac{H_2+M_2}{2+3} &= \frac{M_2}{3} \\ M_2 &= \frac{3x}{5} \end{aligned}$$

Agora, observando a razão no grupo todo temos:

$$\begin{aligned} \frac{M_1+M_2}{H_1+H_2} &= \frac{\frac{2x}{3} + \frac{2x}{5}}{\frac{x}{3} + \frac{3x}{5}} \\ \frac{M_1+M_2}{H_1+H_2} &= \frac{\frac{10x+6x}{15}}{\frac{5x+9x}{15}} = \frac{16x}{14x} = \frac{8}{7}. \end{aligned}$$

17. (Extraído do BQ OBMEP − 2016)
Sejam x, y e z os comprimentos de AB, BC e AC, respectivamente. O tempo de chegada t, comum aos três carros, pode ser encontrado através das equações:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{12} + \dfrac{y}{10} + \dfrac{z}{15} = t \\ \dfrac{x}{15} + \dfrac{y}{15} + \dfrac{z}{10} = t \\ \dfrac{x}{10} + \dfrac{y}{20} + \dfrac{z}{12} = t. \end{cases}$$

Multiplicando todas as equações por 60, obtemos

$$\begin{cases} 5x + 6y + 4z &= 60t \\ 4x + 4y + 6z &= 60t \\ 6x + 3y + 5z &= 60t. \end{cases}$$

Da segunda equação, temos $x + y = (60t - 6z)/4 = (30t - 3z)/2$. Substituindo este valor na terceira equação, temos

$$x = \frac{60t - 3(x+y) - 5z}{3} = \frac{30t - z}{6}.$$

Além disto,

$$y = \frac{30t - 3z}{2} - \frac{30t - z}{6} = \frac{60t - 8z}{6}.$$

Finalmente, substituindo os dois valores encontrados na primeira equação do último sistema, obtemos

$$\begin{aligned} 5 \cdot \frac{30t - z}{6} + 6 \cdot \frac{60t - 8z}{6} + 4z &= 60t \\ 150t - 5z + 360t - 48z + 24z &= 360t \\ t &= \frac{29}{150}z. \end{aligned}$$

Substituindo nas expressões para x e y, podemos concluir que $(x, y, z) = (4z/5, 3z/5, z)$. Como os lados do triângulo ABC estão na proporção $3 : 4 : 5$, podemos concluir que ele é semelhante ao triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5. Consequentemente, $\angle ABC = 90^\circ$.

18. (Adaptado do vestibular da PUC (SP) $-$ 2014)
Sejam x_i e y_i as quantidades de álcool e água no recipiente $i \in \{1, 2\}$ de capacidade n. Assim, podemos escrever

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = n \\ \dfrac{x_1}{3} = \dfrac{y_1}{5} = k_1, \text{ com } k_1 \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Assim, $x_1 = 3k_1$ e $y_1 = 5k_1$ fazendo $n = 8k_1$ ou $k_1 = \dfrac{n}{8}$.

$$\begin{cases} x_2 + y_2 = n \\ \dfrac{x_2}{2} = \dfrac{y_2}{3} = k_2, \text{ com } k_2 \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Assim, $x_2 = 2k_2$ e $y_2 = 3k_1$ fazendo $n = 5k_2$ ou $k_2 = \dfrac{n}{5}$.

Por fim, a razão fica

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} &= \frac{3k_1 + 2k_2}{5k_1 + 3k_2} = \\ &= \frac{3 \cdot \frac{n}{8} + 2 \cdot \frac{n}{5}}{5 \cdot \frac{n}{8} + 3 \cdot \frac{n}{5}} \\ &= \frac{\frac{15n + 16n}{40}}{\frac{25n + 24n}{40}} = \frac{31}{49}. \end{aligned}$$

19. (Adaptado da OBMEP $-$ 2005) Chamando o peso de cada abacate de a, o das bananas de b e o das laranjas de l, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} 4a = 9b \\ 3b = 2l \\ 9l = k, \end{cases}$$

onde k é o peso em de abacates que equilibra a terceira pesagem. Partindo da terceira equação, tem-se

$$2k = 18l = 27b = 12a,$$

ou seja, $2k = 12a$ e daí segue que $k = 6a$. Portanto, deverão ser 6 abacates.

20. (Adaptado da OBM $-$ 2014)
Supondo x a quantidade de sobrinhos e y a quantidade, em reais, que cada sobrinho deveria receber na primeira situação. Analisando as duas situações iniciais, chega-se ao sistema

$$\begin{cases} xy = 250 - 10 = 240 \\ x(y - 1) = 250 - 22 = 228 \end{cases}$$

Perceba que não se trata de um sistema de equações do primeiro grau, mas sua solução é simples. Pela segunda equação, temos $xy - x = 228$. Pela primeira equação, $xy = 240$ e assim obtemos $240 - x = 228$. Daí segue que $x = 12$. Como ela resolveu distribuir igualmente apenas $R\$240,00$, cada sobrinho recebeu $240/12 = R\$20,00$.

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com