Módulo Aplicando as Técnicas Desenvolvidas

Professor, onde foi que eu errei?

2^a **série E.M.**

Professores Tiago Miranda e Cleber Assis

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Aplicando as Técnicas Desenvolvidas
Professor, onde foi que eu errei?

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. A professora Sônia, apaixonada por futebol, leu a seguinte notícia no jornal:
"Apesar das 6 grandes entradas do estádio Majestoso, por medida de segurança, apenas duas delas estarão abertas para o jogo do próximo domingo."
Prontamente ela propôs a sua turma o problema:
De quantas maneiras poderemos deixar liberadas duas dentre as seis entradas do estádio?
Joãozinho respondeu:
— Como temos dois portões a serem escolhidos, isso pode ser feito de $6 \times 6 = 36$ formas.
Mariazinha seguiu com:
— Penso que temos $6 \times 5 = 30$ formas.
Luizinho falou:
— Ao abrirmos os portões A e B ou B e A, estaremos propondo a mesma configuração final para a entrada no estádio. Sendo assim, temos $\dfrac{6 \times 5}{2} = 15$ maneiras.
Identifique se algum estudante acertou a resposta e enumere os erros dos que erraram.

Exercício 2. O jogo "Adivinhe o que eu escolhi?!" possui apenas os cartões os números $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ e $\boxed{3}$. Cada jogador recebe uma carta destas e pode formar números usando um, dois ou os três cartões que possui. Depois eles fixam a respectiva escolha numa tela que só eles vêm e não pode ser mexida até o fim de cada rodada. Ganha quem acertar o número escolhido pelo adversário.
Bárbara chegou para jogar e falou:
— Só há $3 \times 2 \times 1 = 6$ números a serem montados por cada jogador e serem adivinhados pelos demais.
Jéssica disse:
— Na verdade, podemos formar números com apenas um dígito (3 deles), dois dígitos ($3 \times 2 = 6$) e três dígitos (total achado por Bárbara, ou seja, 6), .
Identifique se alguma delas acertou a resposta e enumere o(s) erro(s) daquela(s) que errou (erraram).

Exercício 3. Uma cafeteira tem uma máquina de café que usa cápsulas, que são expostas com as 7 variações de sabores num objeto que parece uma mini roda gigante (que funciona girando) na vitrine da loja. O gerente passou para sua equipe que poderia mudar a disposição das cápsulas na roda gigante a cada dia por mais de uma década, pois ele tinha $7! = 5040$ arrumações possíveis
O que o gerente concluiu está totalmente correto? Caso contrário, aponte o(s) erro(s) dele.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 4. A mala do Dr. Z tem um cadeado cujo segredo é uma combinação com cinco algarismos, cada um dos quais podendo variar de 0 a 9. Ele esqueceu a combinação que escolhera como segredo, mas sabe que atende às condições:

i) se o primeiro algarismo é ímpar, então o último algarismo também é ímpar;

ii) se o primeiro algarismo é par, então o último algarismo é igual ao primeiro;

iii) a soma dos segundo e terceiro algarismos é 5.

Dr. Z tem uma robô chamada "ForçaBruta" que testa a quantidade de combinações diferentes com as condições que forem estabelecidas. O doutor então Observou que a condição (iii) é independente das anteriores. As opções de soma 5 são $(2,3)$, $(3,2)$, $(1,4)$, $(4,1)$, $(5,0)$ e $(0,5)$. E daí, programou a robô para usar: $5 \times 5 = 25$ opções para começar e terminar o número com algarismos ímpares, 6 para os segundo e terceiro dígitos e 10 para o quarto algarismos, e no pior cenário teremos $25 \times 6 \times 10 = 1500$ tentativas (caso só acerte na última). Podemos garantir que a robô abrirá a mala?

Exercício 5. Uma família precisa desativar o alarme de sua residência cuja senha é formada por quatro algarismos distintos e os integrantes só lembram que o primeiro algarismo é 5 e que o último é 3. A central do alarme permite apenas uma tentativa a cada 2 minutos.
O filho diz:
— Nossa! Levaremos o dia todo testando as

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000 \text{ opções.}$$

A filha fala:
— Errado! Já lembramos do 5 no início do 3 no final e que a senha tem algarismos distintos, então levaremos

$$1 \times 10 \times 9 \times 1 \times 2 = 180 \text{ minutos para abrirmos a casa.}$$

O papai argumenta:
— Incorreto! Claro que lembramos do 5 no início do 3 no final, mas o código é de dígitos distintos, então teremos

$$1 \times 8 \times 5 \times 1 \times 2 = 112 \text{ minutos para entrarmos.}$$

— Todos equivocados! Apenas o papai quase acertou, faltou um detalhe, mas depois eu explico pois lembrei a senha, vamos entrar! Encerrou a mamãe.
A mamãe está certa sobre os comentários anteriores? Justifique identificando em cada fala os acertos e os erros.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 6. O problema:
"Com 5 homens e 5 mulheres, de quantos modos se pode formar um casal?",
foi resolvido por um aluno do modo a seguir:
"A primeira pessoa do casal pode ser escolhida de 10 modos, pois ela pode ser homem ou mulher. Escolhida a primeira pessoa, a segunda pessoa só poderá ser escolhida de 5 modos, pois deve ser de sexo diferente da primeira pessoa. Há portanto $10 \times 5 = 50$ modos de formar um casal".
Onde está o erro?

Exercício 7. Um torneio possui n competidores, além de João e Maria. Cada atleta deveria jogar contra o outro exatamente uma vez.

a) Antes de começar o torneio, João falou que iria jogar $(n+1)$ jogos, pois jogaria uma vez contra os outros $(n+1)$ enxadristas. Ele estava certo?

b) Logo depois, Maria continuou falando que, sendo X o número de jogos de cada enxadrista, o total de jogos do torneio seria $\dfrac{X \cdot (n+2)}{2}$, a divisão por dois foi feita pois na lista de jogos, por exemplo, do jogador A teria o jogo A *vs* B e na lista de B teria B *vs* A, e neste caso, esses jogos são o mesmo[1]. Ela está certa?

c) No entanto, João precisou sair após o seu primeiro jogo e Maria teve um problema de saúde e abandonou o torneio após disputar 10 jogos. Ao final do dia, foi contabilizado um total de 55 jogos. Um dos outros competidores perguntou ao Juiz se o jogo que José disputou foi contra Maria. E o árbitro (que estava sem a tabela do jogos no momento) pensou o seguinte:
Considere que havia C_1, C_2, ..., C_n, João e Maria no torneio. Agora, perceba que tivemos $\dfrac{n \cdot (n-1)}{2}$ jogos entre os $C's$. Se João não jogou contra Maria a soma de todos os jogos fica

$$\begin{aligned} \frac{n \cdot (n-1)}{2} + 10 + 1 &= 55 \\ \frac{n \cdot (n-1)}{2} &= 44 \\ n^2 - n - 88 &= 0. \end{aligned}$$

Uma equação do 2° grau com delta positivo, logo tem raízes reais (o juiz sabia um pouco de matemática) e concluiu que o jogo de João não havia sido contra Maria. O juiz acertou?

[1] No xadrez, em regra, o jogo A *vs* B, indica que o jogador A terá as peças brancas e o B as peças pretas, e o jogo B *vs* A significa que B terá as brancas e A as pretas.

Exercício 8. Onze cientistas trabalham num projeto sigiloso. Por questões de segurança, os planos são guardados em um cofre protegido por muitos cadeados de modo que só é possível abri-los todos se houver pelo menos 5 cientistas presentes.

a) O chefe do projeto então fala que há $\dbinom{11}{5} = 2310$ cadeados, no mínimo, para manter a segurança. Ele está certo?

b) Na situação do item anterior, quantas chaves cada cientista deve ter?

Exercício 9. De quantos modos podemos colocar 10 garotos e 10 garotas em uma fila de modo que pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas?

Exercício 10. Qual o número de funções $f : \{1,2,3\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ estritamente crescentes?

Exercício 11. Considere o conjunto $M = \{1,2,\ldots,1000000\}$ e seu subconjunto A formado por todos os inteiros positivos da forma $m^2 + k^3$ com m e n também inteiros positivos. Quem tem mais elementos: A ou $M \setminus A$?

Exercício 12. João escreveu todas as potências de 2, 3 e 5 maiores que 1 e menores que 2017 em uma folha de papel. Em seguida, ele realizou todos os produtos possíveis de dois números distintos dessa folha e os escreveu em outra folha de papel. Qual a quantidade de inteiros que João registrou na segunda folha?

Respostas e Soluções.

1. Luizinho acertou, e vamos explicar o seu acerto corrigindo os erros dos demais. Joãozinho ao fazer 6×6 não considerou que ao abrir um portão, ele deixa de ser uma opção para a segunda abertura. Daí, essa parte do raciocínio foi acertada por Mariazinha, propondo 6×5, mas ela não percebeu que ao parar a conta nesse ponto estaria fazendo contagens em duplicidade, por exemplo $\{X, Y\} = \{Y, X\}$. Exatamente o que Luizinho narrou na solução dele.

2. Jéssica está certa. Devemos considerar todos as formações com as possíveis quantidades de dígitos da situação (um, dois ou três). Por isso, Bárbara errou, pois só destacou o último caso.

3. Típico problema de permutação circular. Nesse caso, sendo A, B, C, $\ldots$, G, as cápsulas, devemos fixar uma das cápsulas como referência, pois ao permutarmos, por exemplo, $ABCDEFG$ com $GABCDEF$ ou $FGABCDE$ ou $EFGABCD$ e assim por diante, na verdade só estamos girando a roda gigante e não mudando a configuração inicial. Assim, podem ser feitas $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ arrumações (ou dias possíveis com disposições diferentes), o que durará menos que 2 anos. O gerente conclui errado o que falou.

4. (Adaptado do vestibular da UFRJ)
Não, pois continuando as condições do enunciado, temos dois cenários:

i) $5 \times 5 = 25$ opções para começar e terminar o número com algarismos ímpares, 6 para os segundo e terceiro dígitos e 10 para o quarto algarismos, totalizando $25 \times 6 \times 10 = 1500$; e

ii) $5 \times 1 = 5$ opções para começar e terminar no mesmo algarismo par, 6 para os segundo e terceiro dígitos e 10 para o quarto algarismos, totalizando $5 \times 6 \times 10 = 300$.

O que resulta num total de $1500 + 300 = 1800$. Caso o segredo da mala esteja no segundo caso, a robô não abrirá a mala.

5. (Adaptado do exame do PROFMAT $-$ 2014**)**
Sabendo que a senha é formada por 4 algarismos distintos, cujo primeiro dígito é 5 e o último é 3 (por isso o filho está errado) ; do total de 10 algarismos restam 8 possibilidades de escolha para o segundo dígito e 7 possibilidade de escolha para o terceiro dígito (por isso a filha está errada). Assim, temos $8 \times 7 = 56$ formações possíveis. Como não é necessário aguardar dois minutos para a primeira tentativa (por isso o papai está errado), mas temos que aguardar um intervalo de tempo de 2 minutos para as demais tentativas, o tempo necessário para ativar o alarme será de $2 \times (56 - 1) = 110$ minutos, ou seja, 1 hora e 50 minutos. E a mamãe estava certa no comentário de que o papai quase acertou.

6. O método desenvolvido tem contagens duplicadas, pois dentre os 10 primeiros contaremos a opção de tirarmos o $Homem_1$ e entre as cinco mulheres, a $Mulher_3$, gerando o casal $\{H_1, M_3\}$. Mas teremos o mesmo conjunto caso dos dez primeiros escolhamos a $Mulher_3$, e entre os cinco homens, o $Homem_1$, gerando o casal

$$\{M_3, H_1\} = \{H_1, M_3\},$$

Para corrigir este fato, precisaríamos dividir o resultado final por dois, isto é,

$$\frac{10 \cdot 5}{2} = 25 \text{ casais.}$$

7. (Bahia $-$ 2015**)**

a) Sim, o raciocínio de João está correto, como são n jogadores contando com João e Maria, teremos $(n+2)$ atletas e, como cada um jogará exatamente uma vez contra todos os demais, João jogará $(n+1)$ partidas.

b) Sim, Maria acertou, a lógica é a mesma explicada com detalhes no enunciado.

c) Considere que havia C_1, C_2, $\ldots$, C_n, João e Maria no torneio. Agora, perceba que tivemos $\dfrac{n \cdot (n-1)}{2}$ jogos entre os $C's$. Se João não jogou contra Maria a soma de todos os jogos fica

$$\begin{aligned} \frac{n \cdot (n-1)}{2} + 10 + 1 &= 55 \\ \frac{n \cdot (n-1)}{2} &= 44 \\ n \cdot (n-1) &= 88 \\ &= 1 \cdot 88 \\ &= 2 \cdot 44 \\ &= 4 \cdot 22 \\ &= 8 \cdot 11. \end{aligned}$$

Como 88 não pode ser escrito como $n \cdot (n-1)$, com n inteiro positivo, essa equação não tem solução inteira. Assim, podemos concluir que João deve ter jogado contra Maria. Para fechar a questão, vamos mostrar que isso de fato ocorreu. Analisemos a possibilidade de Maria ter enfrentado João. Nesse caso, o total de jogos fica

$$\begin{aligned} \frac{n \cdot (n-1)}{2} + 10 &= 55 \\ \frac{n \cdot (n-1)}{2} &= 45 \\ n \cdot (n-1) &= 90 = 9 \cdot 10 \\ n_1 &= 10 \qquad \text{(A outra raiz } n_2 < 0\text{)}. \end{aligned}$$

Colocamos o jogo feito por João na contagem de Maria e encontramos que o torneio começou com 12 pessoas (dez, mais João e Maria) e que houve o jogo único de João foi contra Maria.

8. Considere 4 cientistas A, B, C e D. Com as chaves que possuem, abrem alguns cadeados, mas não todos. Existe pelo menos um cadeado que eles não conseguem abrir.

a) Na situação do número mínimo de cadeados, existe exatamente um cadeado que eles não conseguem abrir. Batize tal cadeado de $ABCD$. Qualquer outro cientista X tem a chave desse cadeado, pois esse X e A, B, C e D formam um grupo de 5 cientistas e, portanto, nesse grupo alguém possui essa chave. Analogamente batize os demais cadeados. Verifique agora que a correspondência entre cadeados e seus nomes é uma bijeção. O numero de cadeados é igual ao número de nomes de cadeados, $\binom{11}{4} = 330$. Portanto, o chefe do projeto está errado.

b) Cada cientista Y possui as chaves dos cadeados que não possuem Y no nome, isto pode ser calculado como $\binom{10}{4} = 210$.

9. Considerando apenas o sexo de cada pessoa, existem duas distribuições possíveis para garantir a alternância, a saber, ou começamos com um garoto ou com uma garota e as posições restantes ficam determinadas. Feita essa escolha, existem 10! possíveis distribuições dos garotos e, para cada uma dessas distribuições, existem 10! distribuições das garotas. Assim, pelo princípio multiplicativo, existem $2 \cdot 10! \cdot 10!$ escolhas.

10. Primeira Solução: Como as imagens são elementos distintos de $\{1, 2, \ldots, n\}$, basta escolhermos três elementos quaisquer, de $\binom{n}{3}$ formas, e associar o menor dele como imagem de 1, o segundo menor como imagem de 2 e o terceiro menor como imagem de 3. Isso garantirá que a função é crescente.

Segunda Solução: Consideremos a tripla $(f(a), f(b), f(c))$. Como a função é crescente, sabemos que os seus elementos são distintos e que $f(a) < f(b) < f(c)$. Para contar a quantidade de tais triplas, escloha o valor de $f(a)$ de n maneiras, o valor de $f(b)$ de $n-1$ maneiras, pois não podemos repetir o valor já escolhido para $f(a)$ e, finalmente, escolha $f(c)$ de $n-2$ maneiras. As escolhas podem ser agrupadas em conjuntos de $3! = 6$ triplas contendo o mesmo conjunto de elementos $\{f(a), f(b), f(c)\}$. Em cada um desses agrupamentos de triplas, apenas um de seus elementos satisfaz a condição $f(a) < f(b) < f(c)$. Portanto, o conjunto de funções é igual ao conjunto de agrupamentos de triplas, ou seja, $\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \binom{n}{3}$.

11. Solução: Como m e k são inteiros positivos e $m^2 + k^3 \leq 10^6$, existem no máximo 10^3 possibilidades para m e 10^2 possibilidades para k. Assim, o conjunto A possui menos que $10^3 \cdot 10^2 = 10^5$ elementos, pois nem todos os pares (m, k) com $1 \leq m \leq 10^3$ e $1 \leq k \leq 10^2$ satisfazem $m^2 + k^3 \leq 10^6$. Por exemplo, $(m, k) = (10^3, 10^2)$ não satisfaz isso. Assim, o complementar de A possui mais que $10^6 - 10^5 = 9 \cdot 10^5$ elementos. Como $10^5 < 9 \cdot 10^5$, segue que o complementar de $M \backslash A$ possui mais elementos que A.

12. (Extraído do Banco de Questões da OBMEP) Inicialmente devemos encontrar as potências de 2, 3 e 5 registradas na primeira folha. Como $2^{10} < 2017 < 2^{11}$, $3^6 < 2017 < 3^7$ e $5^4 < 2017 < 5^5$, as potências escritas na primeira folha podem ser divididas em três conjuntos: $P_2 = \{2^1, 2^2, \ldots, 2^{10}\}$, $P_3 = \{3^1, 3^3, \ldots, 3^6\}$ e $P_5 = \{5^1, 5^2, 5^3, 5^4\}$. Em virtude da fatoração única em números primos, os produtos obtidos pela multiplicação de potências de conjuntos distintos são também distintas. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, existem $10 \cdot 6 + 10 \cdot 4 + 6 \cdot 4 = 124$ produtos de potências distintas. Resta agora contarmos quantos produtos existem entre potências de mesma base. Dado um número primo q e o conjunto $P_q = \{q^1, q^2, \ldots, q^k\}$, o menor produto de potências distintas é $q^1 \cdot q^2 = q^3$ e o maior é $q^{k-1} \cdot q^k = q^{2k-1}$. Verificaremos agora que todas as potências q^t com expoente t entre 3 e $2k-1$ podem ser obtidas como produto de dois números desse conjunto. Se t é par, podemos escrever $t = 2m$ e dado que $3 < t < 2k-1$, temos $1 < m < k-1$. Daí, basta multiplicar as potências q^{m-1} e q^{m+1}, que fazem parte do conjunto P_q, para obtermos $q^{m-1} \cdot q^{m+1} = q^{2m} = q^t$. Se t é ímpar, podemos escrever $t = 2m+1$ e dado que $3 < t < 2k-1$, temos $0 < m < k-1$. Basta então multiplicar q^m e q^{m+1}, que também fazem parte de P_q, para obtermos $q^m \cdot q^{m+1} = q^{2m+1} = q^t$. Isso mostra que existem extamente $2k - 3$ produtos de potências distintas obtidas pela multiplicação de dois elementos de P_q. Aplicando essa contagem com $q = 2$, 3 e 5, podemos concluir que existem mais $18 + 10 + 6 = 34$ potências distintas de mesma base na segunda folha. Logo, o total de números da segunda folha é $124 + 34 = 158$.

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com