Módulo de Métodos Sofisticados de Contagens

O princípio da casa dos pombos

Segundo ano

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

O Princípio da Casa dos Pombos

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Qual o menor valor de n para o qual podemos garantir que entre n pessoas em uma sala existirão sempre duas delas com o mesmo Signo do zodíaco?

Exercício 2. Numa floresta há 1000 jaqueiras. É conhecido que uma jaqueira não tem mais do que 600 frutos. Prove que existem 2 jaqueiras que têm a mesma quantidade de frutos.

Exercício 3. Uma pessoa entrou num quarto escuro, sem enxergar absolutamente nada e abriu uma gaveta na qual haviam exatamente: 20 meias pretas; 15 meias brancas; e 10 meias marrons. Todas estavam misturadas e eram indistinguíveis ao tato. Qual a quantidade mínima de meias que essa pessoa deve retirar para que tenha certeza de ter retirado:

a) um par de meias de mesma cor?

b) um par de meias brancas?

Exercício 4. Uma prova de concurso terá 10 questões de múltipla escolha, com cinco alternativas cada. Qual é o menor número de candidatos para o qual poderemos garantir que pelo menos dois deles darão exatamente as mesmas respostas para todas as questões?

Exercício 5. A "Média aritmética" de n números é a razão entre a sua soma e n. Em um grupo de 54 pessoas, qual a média aritmética dos números de aniversariantes em cada mês?

Exercício 6. Seja $\overline{x}$ a média aritmética de uma lista de números.

a) Verifique que se $\overline{x}$ é a média aritmética de $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, então ao menos um desses termos é maior do que ou igual a $\overline{x}$.

b) Demonstre que num grupo de 54 pessoas, ao menos 5 fazem aniversário no mesmo mês.

c) Sabe-se que 40100 candidatos estão fazendo uma prova de 20 questões, com 5 alternativas por questão. Suponha que nenhum candidato deixe de responder alguma questão. Verifique que pelo menos 65 candidatos responderão as primeiras 4 perguntas de forma idêntica.

d) Sabe-se que 98305 candidatos estão fazendo uma prova de 20 questões em que cada resposta é certo ou errado. Suponha que nenhum candidato deixe de responder alguma questão. Considere a afirmação: "Pelo menos 4 candidatos responderam de modo idêntico as n primeiras questões da prova." Determine o maior valor de n para o qual a afirmação é certamente verdadeira.

Exercício 7. Considere um grupo com 90 torcedores, cada um torcendo ou pelo Flamengo, ou pelo Botafogo, ou pelo Fluminense ou pelo Vasco. Mostre que nesse grupo há pelo menos 23 torcedores de um mesmo time.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 8. Qual o menor valor de d para que tenhamos certeza de que após d lançamentos de um dado de 6 faces ao menos uma delas saiu mais de 5 vezes?

Exercício 9. Prove que se 5 pontos forem tomados no interior de um quadrado de lado 2, ao menos dois desses pontos ficarão numa distância menor do que ou igual a $\sqrt{2}$.

Exercício 10. A soma das idades de 5 estudantes é igual a 86 anos. Prove que podem ser escolhidos 3 cuja soma das idades é maior que 51 anos.

Exercício 11. Dados 9 inteiros quaisquer. Prove que a diferença entre dois deles é divisível por 8.

Exercício 12. Uma prova de concurso é formada por questões de múltipla escolha, com 4 alternativas por questão. Admita que nenhum candidato deixe questões sem responder.

a) Qual é o número mínimo de candidatos para que seja possível garantir que pelo menos 3 deles darão exatamente as mesmas respostas nas 5 primeiras questões?

b) Qual é o valor máximo de n para o qual é possível garantir que, em um concurso com 1000 candidatos, pelo menos 2 darão as mesmas respostas nas n primeiras questões?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 13. Qual o menor número de pessoas num grupo para garantir que pelo menos 4 nasceram no mesmo mês?

Exercício 14. Uma máquina contém pequenas bolas de borracha de 10 cores distintas, sendo 10 bolas de cada cor. Ao inserir uma moeda, uma bola é expelida ao acaso. Para garantir a retirada de 4 bolas da mesma cor, qual o menor número de moedas que devem ser inseridas na máquina?

Exercício 15. Escolhendo-se aleatoriamente 41 elementos do conjunto $\{1, 2, 3, \cdots, 80\}$, mostre que, entre os escolhidos, há dois números tais que um divide o outro.

Exercício 16. Considere uma reunião com n pessoas. Supondo que se A conhece B, então B conhece A, mostre que existem duas pessoas que conhecem a mesma quantidade de pessoas na reunião.

Exercício 17. Mostre que entre sete inteiros positivos distintos menores do que 127 sempre haverá um par deles, digamos (x, y), tal que $1 < \dfrac{y}{x} \leq 2$.

Exercício 18. Mostre que em todo subconjunto de $n+1$ elementos do conjunto $\{1, 2, 3, \cdots, 2n-1, 2n\}$ há dois números relativamente primos entre si. [1]

Exercício 19. Dado um inteiro positivo n, mostre que existe algum múltiplo dele que se escreve apenas com os algarismos 0 e 1.

Exercício 20. Mostre que existe algum múltiplo de 7 que se escreve apenas com uma sequência de algarismos iguais a 1.

Exercício 21. Mostre que existe um número da forma $199\ldots91$ (com pelo menos três noves) que é múltiplo de 1991.

Exercício 22. Dezessete pessoas se correspondem por e-mail, cada uma com todas as outras. Nessas correspondências são debatidos os temas I, II e III. Prove que ao menos 3 pessoas debatem o mesmo tema entre si.

Exercício 23. Um enxadrista, durante 11 semanas, joga pelos menos uma partida por dia, mas não joga mais de 12 partidas por semana. Mostre que é possível achar um conjunto de dias consecutivos durante os quais ele jogou exatamente 20 partidas.

Exercício 24. João trabalha vendendo pacotes de previsão astrológica. Para incrementar as vendas de suas previsões, ele oferece descontos caso pessoas de um mesmo signo queiram contratar seus serviços. No Horóscopo Grego, como existem exatamente 12 signos, portanto, em um grupo de 13 pessoas, sempre duas delas terão o mesmo signo e poderão se interessar pelo pacote promocional.

a) Qual o número mínimo de pessoas que um grupo deve possuir para ele ter certeza de que existirão pelo menos 3 pessoas de um mesmo signo do Horóscopo Grego?

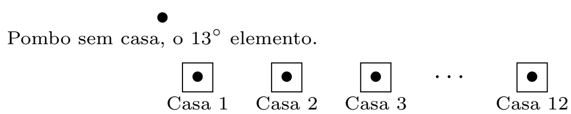
b) No horóscopo Chinês, também existem exatamente 12 signos. Se João quiser ter certeza de que, em determinado grupo de pessoas existirão duas possuindo exatamente os mesmos signos, tanto no Horóscopo Grego quanto no Horóscopo Chinês, qual o número mínimo de pessoas que tal grupo deve ter?

[1] Dizemos que dois números são relativamente primos entre si se eles não possuem fatores primos em comum.

Respostas e Soluções

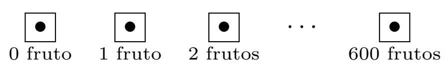
1 Exercícios Introdutórios

1. Como existem 12 Signos do zodíaco, se tivéssemos apenas 12 pessoas, seria possível cada uma delas ter um dos 12 Signos e não poderíamos garantir duas com o mesmo signo. Portanto, n é pelo menos 13. Pensando nos Signos como as casas e nas pessoas como os pombos, se não for possível encontrar um signo repetido entre as 13 pessoas, a 13^a não poderá ser associada a nenhum dos signos. Isso é claramente uma contradição e consequentemente sempre algum Signo se repete entre 13 pessoas.

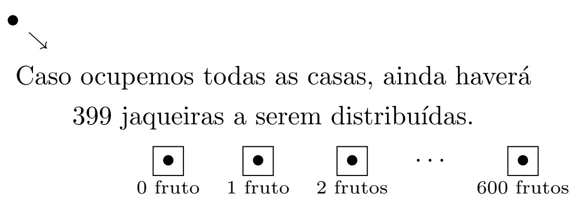


2. Vamos pensar na quantidade de frutos como as casas e nas jaqueiras como os pombos (•)

$$0, 1, 2, \cdots, 600$$



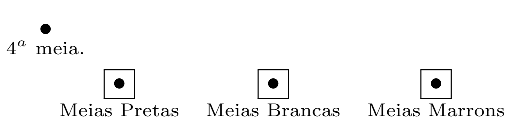
Agora coloquemos as jaqueiras (que serão os pombos) nas respectivas casas que representam suas quantidades de frutos.



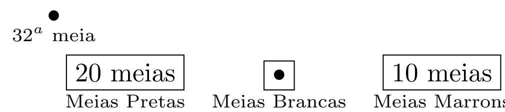
Como $1000 > 601$, o PCP garante que alguma casa terá dois pombos, ou seja, duas jaqueiras terão a mesma quantidade de frutos.

3. Considere as três cores como sendo as casas e as meias retiradas como os pombos.

a) Considere as três cores como sendo as casas e as meias retiradas como sendo os pombos. Pelo Princípio da Casa dos Pombos, se retirarmos 4 meias, pelo menos duas delas terão a mesma cor. Para ver que esse é o número mínimo, note que é possível pegarmos uma meia de cada cor nas três primeiras retiradas e não formarmos um par.



b) Se a pessoa retirar toda as meias de cor preta, todas as meias de cor marrom e depois uma única meia de cor branca, ela ainda não terá realizado o objetivo, ou seja, $20+10+1 = 31$ não é o mínimo. Além disso, retirando-se $20+10+2 = 32$, mesmo que todas as meias das cores preta e marrom seja retiradas, pelomenos duas serão da cor branca. Portanto, o mínimo é 32.



4. Considere os candidatos como os pombos e as sequências de respostas como as casas. Como cada questão possui de 5 alternativas, a prova poderá ser respondida de

$$5 \times 5 \times 5 \times \cdots \times 5 = 5^{10} = 9765625 \text{ modos.}$$

Logo, pelo PCP, para que dois candidatos forneçam exatamente as mesmas respostas, deverão participar pelo menos $9765625 + 1 = 9765626$ pessoas.

5. Seja x_i a quantidade de aniversariantes no mês $i \in \{1, 2, \ldots, 12\}$. Daí

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{12} = 54.$$

Portanto, a média aritmética é

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{12}}{12} = \frac{54}{12} = 4,5.$$

6. a) Faremos uma prova por absurdo. Suponha que x_1, x_2, x_3, ..., x_n são todos menores que a sua média, isto é:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & < & \overline{x} \\ x_2 & < & \overline{x} \\ x_3 & < & \overline{x} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & < & \overline{x} \end{array}$$

Somando todas as inequações, obtemos:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n & < & \underbrace{\overline{x} + \overline{x} + \overline{x} + \cdots + \overline{x}}_{n \text{ parcelas iguais a } \overline{x}.} \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n & < & n \cdot \overline{x} \\ \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} & < & \overline{x} \\ \overline{x} & < & \overline{x} \end{array}$$

Concluímos que a média aritmética é menor do que a média aritmética e isso é claramente um absurdo. Portanto, não podemos ter todos os x_i, com $i \in \{1, 2..., n\}$, menores do que $\overline{x}$. Ou seja, ao menos um dos x_i é maior do que ou igual a $\overline{x}$.

b) Seja $x_i \in \mathbb{N}$ a quantidade de aniversariantes no mês $i \in 1, 2, \ldots, 12$. Daí

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{12} = 54.$$

Fazendo a média aritmética temos

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{12}}{12} = \frac{54}{12} = 4,5.$$

O número médio de aniversariantes por mês é $4,5$. Pelo item anterior, ao menos um dos x_i será maior do que ou igual a média. Como x_i é natural, seu menor valor será, no mínimo, 5.

c) As 4 primeiras questões podem ser respondidas de $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ maneiras. O número médio de candidatos para cada possível resposta é $\dfrac{40100}{625} = 64,16$. Pelo item a), garante-se que ao menos 65 candidatos terão mesma resposta para as primeiras 4 questões.

d) As n primeiras questões podem ser respondidas de $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$ maneiras. Para garantir que pelo menos 4 candidatos respondam a estas questões do mesmo modo, precisa-se ter pelo menos $3 \cdot 2^n + 1$ candidatos. Portanto, deve-se ter

$$3 \cdot 2^n + 1 \leq 98305.$$

O que ocorre para $n \leq 15$. Daí, o valor máximo para n é 15.

7. Seja x_i, com $i \in$ {Flamengo, Botafogo, Fluminense, Vasco} a quantidade de torcedores do time i. Então:

$$x_{Flamengo} + x_{Botafogo} + x_{Fluminense} + x_{Vasco} = 90$$

e a média de torcedores por time é:

$$\overline{x} = \frac{90}{4} = 22,5.$$

Portanto, algum x_i é pelo menos $22,5$ e, como $x_i \in \mathbb{N}$, há alguma torcida com, no mínimo, 23 integrantes.

2 Exercícios de Fixação

8. Como há 6 faces, para ter certeza que ao menos um delas saiu:

i) 2 vezes, deveremos ter ao menos 7 lançamentos;

ii) 3 vezes, deveremos ter ao menos 13 lançamentos;

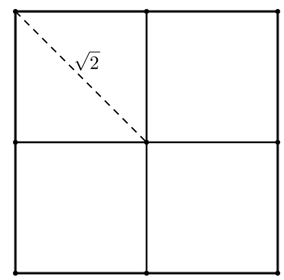
iii) 4 vezes, deveremos ter ao menos 19 lançamentos;

iv) 5 vezes, deveremos ter ao menos 26 lançamentos; e

v) 6 vezes, deveremos ter ao menos 31 lançamentos.

O mínimo será $d = 31$ lançamentos. A ideia é pensar que o número em cada face representa uma casa (6 números = 6 casas). Queremos alguma casa com mais do que 5 pombos (lançamentos) então deve-se distribuir os resultados dos lançamentos nas respectivas casas, nosso objetivo é alcançar uma casa com mais de 5 repetições. Isso pode acontecer "no pior dos cenários" se todas as casas forem sendo preenchidas até chegar ao número 5, esse quadro será alcançado após 30 lançamentos. Portanto, no 31° lançamento teremos o objetivo alcançado!

9. Em um problema geométrico nem sempre é simples perceber como construir as casas dos pombos, mas é natural supor que os pontos representam os pombos. As casas deverão ser pensadas de modo a garantir algum segmento de comprimento pelo menos $\sqrt{2}$. Sendo assim, observe a construção abaixo:



e perceba que há quatro quadrados internos (surgiram as casas) de lado medindo 1 cm e diagonal medindo $\sqrt{2}$. Por fim, como são cinco pontos, ao menos uma das casa terá dois pontos e a distância entre eles será de, no máximo, $\sqrt{2}$. $\square$

10. Sejam x_i, com $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, as idades dos cinco estudantes. Portanto,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 86 \text{ anos}.$$

Podemos listar todos os 10 trios de idades possíveis:[1]:

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_4 \\ x_1 + x_2 + x_5 \\ x_1 + x_3 + x_4 \\ x_1 + x_3 + x_5 \\ x_1 + x_4 + x_5 \\ x_2 + x_3 + x_4 \\ x_2 + x_3 + x_5 \\ x_2 + x_4 + x_5 \\ x_3 + x_4 + x_5 \end{gathered}$$

Somando-os, obtemos

$$\begin{aligned} 6 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) &= 6 \cdot 86 \\ &= 516. \end{aligned}$$

[1]Com 5 estudantes podemos formar $C_{5,3} = 10$ trios, de modo que cada estudante participe de $C_{4,2} = 6$ trios.

Portanto, a média dos trios será $\frac{516}{10} = 51,6$ anos. Consequentemente, ao menos um dos trios terá soma maior do que ou igual a 51.

11. Numa divisão por oito, existem apenas 8 restos possíveis: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Portanto, considerando os restos como casas e os 9 inteiros como pombos, podemos garantir pelo PCP que pelo menos dois números estarão na mesma casa. Ou seja, a diferença entre eles deixará resto 0 na divisão por 8.

12. a) Para as 5 primeiras questões, há $4^5 = 1024$ gabaritos distintos. É possível termos 2048 candidatos de modo a cada gabarito se repita duas vezes. Além disso, se houver 2049 pessoas, poderemos garantir que alguma sequência de respostas foi repetida ao menos 3 vezes.

b) Para as n primeiras questões, há 4^n gabaritos distintos. Entre 1000 candidatos garante-se que ao menos 2 responderam da mesma forma se

$$1000 \geq 4^n + 1,$$

ou seja, se $4^n \leq 999$. Como $2^{10} > 1024$, o valor máximo de n é 4.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

13. (Extraído do Vestibular da PUC/RJ)
Pensando nos 12 meses como as casas e as n pessoas como os pombos. Se houver uma distribuição de 3 pessoas em cada mês não se chega ao objetivo do problema e já teriam sido observadas $12 \times 3 = 36$ pessoas no grupo. Agora basta que mais uma pessoa seja colocada em qualquer das casas para concluir o problema. Portanto, 37 pessoas num grupo garantem que ao menos 4 nasceram no mesmo mês.

14. (Extraído do Vestibular da UERJ/RJ - 2011)
Considere as 10 cores como sendo as casas e as bolas como sendo os pombos. Pelo PCP, se tivermos $3 \cdot 10 + 1 = 31$ bolas, pelo menos 4 terão a mesma cor. Esse é o mínimo porque é possível retirarmos 30 bolas sendo 3 de cada cor.

15. Todo número inteiro pode ser escrito da forma $2^n \cdot b$, com b ímpar e n natural. Observando o conjunto percebemos que $b \in \{1, 3, 5, 7, 9, \cdot, 79\}$. Como o conjunto anterior possui 40 elementos (casas) e serão escolhidos 41 números (pombos), ao menos dois deles , pelo PCP, terão o mesmo vaor de b Se $x = 2^{n_1} \cdot b$ e $y = 2^{n_2} \cdot b$, com $x < y$, são os dois números escolhidos temos que x divide y pois 2^{n_1} divide 2^{n_2}.

16. Vamos pensar na quantidade de conhecidos como as casas

$$0, 1, 2, \cdots, n-1$$

Agora coloquemos as pessoas (que serão os pombos) nas respectivas casas que representam suas quantidades de conhecidos. As gavetas 0 e $n-1$ não poderão ser preenchidas ao mesmo tempo, afinal, se alguém conhece $n-1$ dos presentes, não há como outra pessoa sem conhecidos no grupo (e *vice-versa*). Isso reduz a "quantidade prática" das gavetas que podem ser ocupadas para $n-1$. Como existem mais pombos do que gavetas, pelo PCP, alguma delas terá dois pombos.

17. A inequação simultânea $1 < \frac{y}{x} \leq 2$ pode ser reescrita como $x < y \leq 2x$. Vamos criar 6 conjuntos (casas) com elementos que verificam essa inequação. Para tal, construiremos conjuntos com os números de x até $2x$ como segue:

$$\begin{gathered}\{1, 2\}\\ \{3, 4, 5, 6\}\\ \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}\\ \{15, 16, 17, \cdots, 28, 29, 30\}\\ \{31, 32, 33, \cdots, 60, 61, 62\}\\ \{63, 64, 65, \cdots, 122, 123, 126\}\end{gathered}$$

Qualquer dupla pertencente a um mesmo conjunto verifica a inequação. Se fossem 6 números (pombos), poderíamos escolher um de cada conjunto e a afirmação não seria verdadeira. Como são 7 números (pombos), pelo PCP, haverá dois deles pertencentes ao mesmo conjunto e isso demonstra o que foi pedido. $\square$

18. Construa os n subconjuntos de números consecutivos

$$\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \cdots, \{2n-1, 2n\}.$$

Veja que os dois números em cada uma desses subconjuntos são relativamente primos entre si. Essas serão as casas. Como serão escolhidos $n+1$ elementos (pombos), pelo PCP, alguma dupla será escolhida no mesmo conjunto e, portanto, será composta por números primos entre si.

19. Considere a sequência

$$1, 11, 111, 1111, 11111, \cdots, \underbrace{111\ldots111}_{\text{“}n+1\text{” uns.}}$$

Esses $n+1$ números (pombos), serão distribuídos nas n casas que representam os possíveis restos numa divisão por n. Pelo PCP, teremos dois pombos na mesma casa. A subtração entre esses números será:

$$\underbrace{111\ldots111}_{\text{“}a\text{” uns.}} - \underbrace{111\ldots111}_{\text{“}b\text{” uns.}} = \underbrace{111\ldots111}_{\text{“}a-b\text{” uns}}\underbrace{000\ldots000}_{\text{“}b\text{” zeros.}}$$

sendo "a" maior do que "b". O que finaliza a demonstração. $\square$

20. Considere a sequência

$$1, 11, 111, 1111, \cdots, 11111111$$

Esses 8 números (pombos), serão distribuídos nas 7 casas que representam os possíveis restos numa divisão por 7. Pelo PCP, teremos dois pombos na mesma casa. A subtração entre esses números será:

$$\underbrace{111\ldots111}_{\text{“}a\text{” uns.}} - \underbrace{111\ldots111}_{\text{“}b\text{” uns.}} = \underbrace{111\ldots111}_{\text{“}a-b\text{” uns}}\underbrace{000\ldots000}_{\text{“}b\text{” zeros.}}$$

sendo “a” maior do que “b”. Como

$$\underbrace{111\ldots111}_{\text{“}a-b\text{” uns}}\underbrace{000\ldots000}_{\text{“}b\text{” zeros.}} = \underbrace{111\ldots111}_{\text{“}a-b\text{” uns}}\cdot 10^b.$$

é múltiplo de 7 e $mdc(10^b, 7) = 1$, segue que 7 divide $\underbrace{111\ldots111}_{\text{“}a-b\text{” uns}}$.

Comentário para professores:. O método desenvolvido no problema **??** poderá ser aplicado para qualquer número que seja relativamente primo com 10. Ou seja, qualquer número que não possua em sua fatoração o 2 ou o 5, possui um múltiplo apenas com algarismos iguais a 1.

21. (Extraído da OBM)
Considere todos os números da forma $199\ldots91$ (pombos) e observe os 1991 possíveis restos numa divisão por 1991 (casas). Como há mais pombos do que casas, teremos dois deles na mesma casa e a subtração entre eles será um múltiplo de 1991 da forma $199\ldots9980\ldots0$. Sendo $mdc(10, 1991) = 1$, podemos eliminar zeros à direita sem perder a divisibilidade por 1991. Façamos isso até chegarmos ao número $199\ldots998000$, agora, basta somarmos 1991 e chegamos a um número do tipo $199\ldots91$ □

22. (Extraído da IMO)
Escolha uma pessoa do grupo, por exemplo, Maria. Ela se corresponde com 16 outras pessoas. Pelo PCP, Maria debaterá algum tópico com ao menos 6 pessoas, por exemplo o tema I. Se duas dessas 6 debaterem esse tema, esta demonstrado. Caso contrário, essas seis só debatem entre si os temas II e III. Seja uma delas o Paulo. Pelo PCP, das 5 pessoas restantes, ao menos 3 vão debater um dos tópicos restantes, suponha que seja o II. Se entre essas três tivermos um par que debate do tópico II entre si, então somamos Paulo e finalizamos a demonstração. Caso negativo, esses três elementos só debaterão entre si no tópico III e a demonstração acabou. □

23. (Extraído do material do PROFMAT)
Em 11 semanas temos 77 dias. Defina S_i, $i \in \{1, 2, \cdots, 77\}$, como sendo o número de partidas jogadas a partir do dia 1 até o dia i. Como ele joga ao menos uma partida por dia, temos

$$1 \leq S_1 < S_2 < S_3 < \cdots < S_{77}.$$

Além disso, $S_{77} \leq 132$, pois ele não joga mais de 12 partidas por semana, ou seja, o total de jogos não atinge $11 \cdot 12 = 132$. Agora, chamando $S_0 = 0$, a quantidade de jogos entre os dias a e b, inclusive, é igual a $S_b - S_{a-1}$. Queremos mostrar que é possível determinar a e b de modo que $S_b - S_{a-1} = 20$. Considere os 154 números (que serão os pombos)

$$S_1, S_2, \ldots, \underbrace{S_{77}}_{\leq 132}, S_1 + 20, S_2 + 20, \ldots, \underbrace{S_{77} + 20}_{\leq 152}.$$

Eles pertencem a $\{1, 2, \ldots, 152\}$, que serão as casas. Como temos mais pombos que casas, o PCP assegura que alguma casa terá dois pombos. Como

$$S_1 < S_2 < S_3 < \cdots < S_{77}$$

e, por consequência,

$$S_1 + 20 < S_2 + 20 < S_3 + 20 < \cdots < S_{77} + 20,$$

os números iguais deverão estar em metades diferentes da lista. Então existem a' e b' tais que $S_{b'} = S_{a'} + 20$. Portanto, o enxadrista joga 20 partidas entre os dias $b' + 1$ e a', inclusive.

24. (Extraído do Banco de Problemas 2015)

a) O mínimo é 25. Se em um grupo de 24 pessoas cada signo aparecer no máximo duas vezes, teremos no máximo $2 \cdot 12 = 24$ pessoas. Como $24 < 25$, isso mostra que pelo menos um dos signos deverá aparecer três vezes. De fato, esse é o mínimo onde tal propriedade ocorre pois se considerarmos 24 pessoas divididas em 12 pares com o mesmo signo, a propriedade do enunciado não será encontrada.

b) O número mínimo é $12 \cdot 12 + 1 = 145$. Veja que existem no máximo $12 \cdot 12 = 144$ pares de combinações possíveis entre signos Gregos e Chineses. Se escolhermos 145 pessoas e as dividirmos de acordo com esses pares, pelo menos um deles deverá ser usado duas vezes. Não é possível concluirmos isso com menos que 145 pois é possível 144 pessoas apresentarem todos os pares possíveis de combinações sem repetições.

PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
CONTATO@CURSOARQUIMEDES.COM