

Módulo Geometria Espacial 3 - Volumes e Áreas de Cilindro, Cone e Esfera

Esfera.

3^a série E.M.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda



Geometria Espacial 3 - Volumes e Áreas de Cilindro,
Cone e Esfera.
Esfera.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine a área e o volume de uma esfera cujo raio mede 9cm .

Exercício 2. Uma laranja tem o formato de uma esfera de 4cm de raio. Se a quantidade de suco corresponde à 80% do volume da laranja, pelo menos quantas laranjas inteiras como esta são necessárias no preparo para encher completamente de suco um copo de 300ml ?

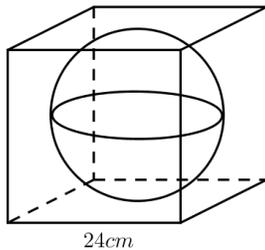
Exercício 3. Uma formiga caminha sobre a linha do equador de um globo terrestre esférico de 20cm de raio. Qual a distância percorrida pela formiga em cada volta sobre esta linha?

Exercício 4. Qual a quantidade de couro aproximada usada para forrar uma bola de futebol cujo raio é de aproximadamente 11cm ?

Exercício 5. Uma melancia em formato esférico, com 21cm de raio, é cortada em 12 fatias (12 cunhas esféricas). Qual o volume de cada uma destas fatias?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. Qual o volume de uma esfera inscrita em um cubo de 24cm de aresta?

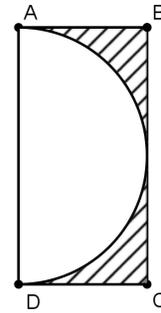


Exercício 7. Numa esfera de 10cm de diâmetro, faz-se um corte por um plano que dista 4cm do centro. Determine a área da seção feita.

Exercício 8. Calcule o volume de um cilindro equilátero inscrito em uma esfera de 4cm de raio.

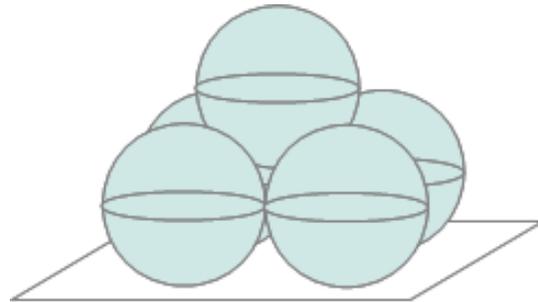
Exercício 9. Um recipiente em formato cilíndrico tem 3cm de raio da base e 10cm de altura. O nível da água tem 5cm de altura, mas quando uma esfera metálica é colocada no recipiente, esse nível da água passa a ter 8cm . Determine o raio da esfera.

Exercício 10. De um retângulo $ABCD$, de base $CD = a$ e altura $BC = 2a$, recorta-se uma semicircunferência de diâmetro AD . Determine o volume do sólido gerado ao girarmos a figura que restou após o recorte usando AD como eixo.



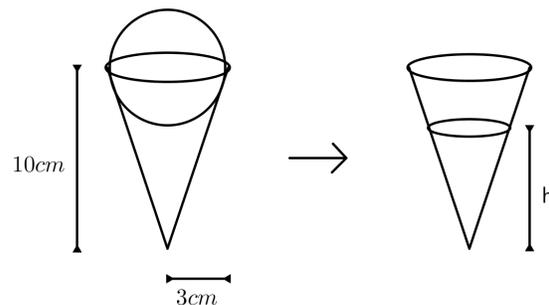
Exercício 11. Qual a medida da aresta de um cubo que possui o mesmo volume de uma esfera de 10cm de raio?

Exercício 12. Quatro esferas de 3cm de raio são colocadas, tangentes duas a duas, sobre uma mesa, de maneira que seus centros formem um quadrado. Uma quinta esfera, idêntica às primeiras, é colocada sobre as quatro primeiras. Qual a distância do centro da quinta esfera à superfície da mesa?



3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 13. Uma bola de sorvete de 3cm de raio é colocada em uma casquinha cônica de 3cm de raio da base e 10cm de altura. Com o passar do tempo esta bola derrete completamente e escorre para dentro do cone. Determine a altura do nível de sorvete.



Exercício 14. Um cálice com a forma de um cone contém $V\text{cm}^3$ de uma bebida. Uma cereja de forma esférica com diâmetro de 2cm é colocada no cálice de forma a ficar

tangente às paredes do cálice e à superfície do líquido. Determine V .

Exercício 15. Um recipiente cilíndrico, cujo raio da base tem medida R , contém água até uma certa altura. Uma esfera de aço é mergulhada nesse recipiente ficando totalmente submersa, sem haver transbordamento de água. Se a altura da água subiu $\frac{9}{16}R$, então o raio da esfera mede:

- a) $\frac{2}{3}R$.
- b) $\frac{3}{4}R$.
- c) $\frac{4}{9}R$.
- d) $\frac{1}{3}R$.
- e) $\frac{9}{16}R$.

Exercício 16. Um cone de revolução tem altura 4cm e está circunscrito a uma esfera de raio 1cm . O volume desse cone (em cm^3) é igual a:

- a) $\frac{1}{3}\pi$.
- b) $\frac{2}{3}\pi$.
- c) $\frac{4}{3}\pi$.
- d) $\frac{8}{3}\pi$.
- e) 3π .

Exercício 17. Seis esferas de mesmo raio R são colocadas sobre uma superfície horizontal de tal forma que seus centros definam os vértices de um hexágono regular de aresta $2R$. Sobre estas esferas é colocada uma sétima esfera de raio $2R$ que tangencia todas as demais. Determine a distância do centro da sétima esfera à superfície horizontal.

Respostas e Soluções.

$$1. A = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 9^2 = 324\pi \text{cm}^2.$$

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 9^3}{3} = 972\pi \text{cm}^3.$$

2. Usando uma aproximação para π de 3,14, temos que o volume de uma laranja é

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 4^3}{3} = 267,94 \text{cm}^3 = 267,94 \text{ml}.$$

Mas como apenas 80% deste volume é de suco, temos que o suco de cada laranja corresponde a $0,8 \cdot 267,94 = 214,35 \text{ml}$. Para um copo de 300ml , precisaremos de $\frac{300}{214,35} \cong 1,39$ laranjas, ou seja, devemos usar pelo menos 2 laranjas.

3. A linha do equador de uma esfera corresponde ao comprimento da maior circunferência possível, ou seja, uma circunferência de raio 20cm . Temos então que cada volta corresponde a $2\pi r \cong 2 \cdot 3,14 \cdot 20 = 125,60 \text{cm}$.

$$4. A = 4\pi r^2 \cong 4 \cdot 3,14 \cdot 11^2 = 1.519,76 \text{cm}^2.$$

5. O volume de cada fatia (cunha) é $\frac{1}{12}$ do volume da melancia. Temos então $V = \frac{4\pi r^3}{12} = \frac{4\pi 21^3}{36} = 1029\pi \text{cm}^3$.

6. Se a esfera é inscrita ao cubo, seu raio mede a metade da medida da aresta do cubo, ou seja, 12cm . Temos então que seu volume é $V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 12^3}{3} = 2.304\pi \text{cm}^3$.

7. A seção determinada pelo corte é uma circunferência. O raio desta circunferência r , o raio da esfera R e o segmento que une os centros da esfera e da circunferência d formam um triângulo retângulo. Temos então:

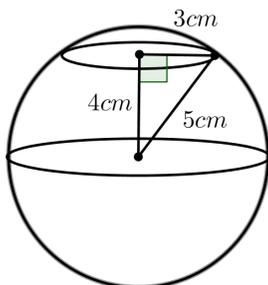
$$R^2 = r^2 + d^2$$

$$5^2 = r^2 + 4^2$$

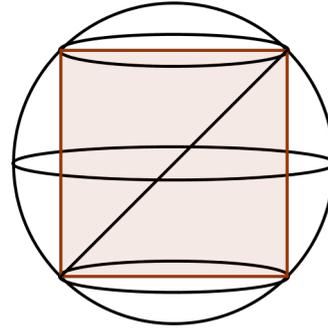
$$r^2 = 9$$

$$r = 3.$$

Se $r = 3 \text{cm}$, a área da seção feita é $A = \pi 3^2 = 9\pi \text{cm}^2$.



8. (Extraído da Vídeo Aula) Como o cilindro, de altura h e raio da base r , é equilátero, então $h = 2r$, ou seja, sua seção meridiana é um quadrado, sendo a diagonal deste quadrado, o diâmetro da esfera, que mede 8cm . Temos então $8 = h\sqrt{2}$, segue que $h = 4\sqrt{2} \text{cm}$ e $r = 2\sqrt{2} \text{cm}$. Dessa forma, o volume do cilindro é $V = \pi r^2 h = \pi (2\sqrt{2})^2 4\sqrt{2} = 32\pi\sqrt{2} \text{cm}^3$.



9. (Extraído da Vídeo Aula) O volume da esfera V_e deve ser igual ao volume do deslocamento de água V_a . Temos então:

$$V_e = V_a$$

$$\frac{4\pi R^3}{3} = \pi r^2 h$$

$$\frac{4R^3}{3} = 3^2(8 - 5)$$

$$4R^3 = 81$$

$$R = 3\sqrt[3]{\frac{3}{4}}.$$

Só podemos concluir que $R = 3\sqrt[3]{\frac{3}{4}} \text{cm}$, depois de verificarmos que $R < r$ e $2R < 8 \text{cm}$, o que é verdadeiro pois $R \cong 2,72 \text{cm}$.

10. (Extraído da Vídeo Aula) O sólido gerado é um cilindro de altura $2a$ e raio da base a , subtraído de seu centro uma esfera de raio a . Temos então:

$$V = V_{\text{cil}} - V_{\text{esf}}$$

$$= \pi r^2 h - \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$= \pi a^2 2a - \frac{4\pi a^3}{3}$$

$$= \frac{6\pi a^3 - 4\pi a^3}{3}$$

$$= \frac{2\pi a^3}{3}.$$

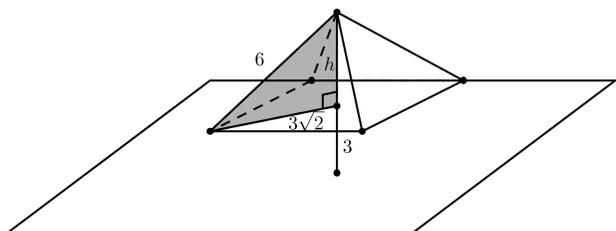
11. Seja a a medida da aresta do cubo, temos:

$$\begin{aligned} V_{cubo} &= V_{esfera} \\ a^3 &= \frac{4\pi r^3}{3} \\ a^3 &= \frac{4\pi 10^3}{3} \\ a &= 10\sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}} \text{ cm.} \end{aligned}$$

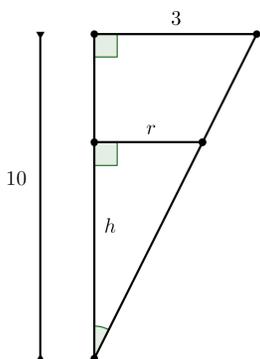
12. Unindo os centros das esferas, temos uma pirâmide quadrangular regular de aresta da base medindo 6 cm e aresta lateral também medindo 6 cm . A distância entre o centro da quinta esfera e a superfície da mesa é a altura h da pirâmide mais 3 cm . Como a base da pirâmide é um quadrado, o raio da circunferência circunscrita a esse quadrado, a altura da pirâmide e a aresta lateral da pirâmide formam um triângulo retângulo. Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{aligned} h^2 + (3\sqrt{2})^2 &= 6^2 \\ h^2 &= 36 - 18 \\ h^2 &= 18 \\ h &= 3\sqrt{2} \text{ cm.} \end{aligned}$$

Portanto a distância do centro da quinta esfera à superfície da mesa é $(3\sqrt{2} + 3)\text{ cm}$.



13. O volume da bola de sorvete é $V = \frac{4 \cdot \pi \cdot 3^3}{3} = 36\pi \text{ cm}^3$. Depois que o sorvete derrete, ele forma uma superfície circular na casquinha de raio r . Podemos estabelecer uma relação entre este raio r e a altura h do nível de sorvete, observando o desenho que segue.

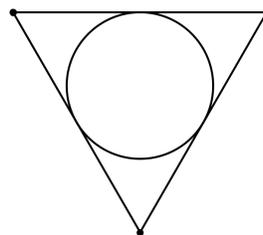


Como os triângulos são semelhantes, temos $\frac{r}{h} = \frac{3}{10}$, segue que $r = \frac{3h}{10}$. Calculando agora o volume de líquido derretido, que já conhecemos, ficamos com:

$$\begin{aligned} V &= 36\pi \\ \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} &= 36\pi \\ \left(\frac{3h}{10}\right)^2 \cdot h &= 108 \\ \frac{9h^3}{100} &= 108 \\ h^3 &= 1.200 \\ h &= \sqrt[3]{1.200}. \end{aligned}$$

Como a altura do nível de sorvete que encontramos é $h = \sqrt[3]{1.200} \cong 10,6\text{ cm}$, significa que o sorvete transborda, ou seja, não cabe na casquinha.

14. (Extraído da Vídeo Aula) Como a cereja com formato esférico fica tangente à taça e à superfície líquida, vamos observar o desenho com a secção meridiana do cone.



Se o raio da esfera é 1 cm , a altura do cone é 3 cm , pois na secção meridiana temos um triângulo equilátero circunscrito a uma circunferência e, conseqüentemente, o lado deste triângulo é $\ell = 2\sqrt{3}\text{ cm}$, ou seja, o raio da base do cone é $R = \sqrt{3}\text{ cm}$. Vamos agora para o cálculo do volume de líquido V , que é a diferença entre os volumes do cone e da esfera:

$$\begin{aligned} V &= V_{cone} - V_{esfera} \\ &= \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3} - \frac{4\pi \cdot r^3}{3} \\ &= \frac{\pi \cdot \sqrt{3}^2 \cdot 3}{3} - \frac{4\pi \cdot 1^3}{3} \\ &= \frac{9\pi}{3} - \frac{4\pi}{3} \\ &= \frac{5\pi}{3} \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

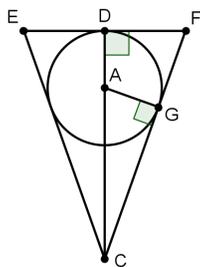
15. (Extraído da EsPCEX - 2015) O volume da esfera é igual ao deslocamento de água no cilindro. Considerando

r a medida do raio da esfera, temos:

$$\begin{aligned} V_{\text{esfera}} &= V_{\text{agua}} \\ \frac{4\pi r^3}{3} &= \pi R^2 \frac{9R}{16} \\ r^3 &= \frac{27R^3}{64} \\ r &= \frac{3R}{4}. \end{aligned}$$

Resposta B.

16. (Extraído da EsPCEEx - 2014) Vamos observar a secção meridiana da situação.



Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo AGC , temos $GC^2 = (DC - AC)^2 - 1^2$, segue que $GC = 2\sqrt{2}cm$. Além disso, podemos perceber que $\triangle AGC \cong \triangle FDC$. Temos então:

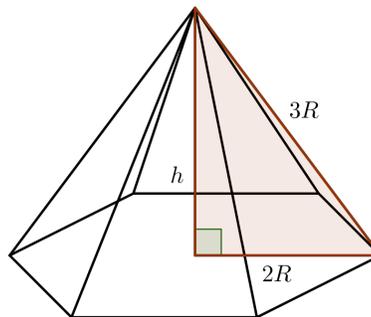
$$\begin{aligned} \frac{DC}{GC} &= \frac{DF}{AG} \\ \frac{4}{2\sqrt{2}} &= \frac{r}{1} \\ r &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Como já conhecemos o raio r da base do cone e sua altura, seu volume é $V = \frac{\pi \cdot 2 \cdot 4}{3} = \frac{8\pi}{3}cm^3$. Resposta D.

17. (Extraído do ITA - 2014) Unindo-se os vértices das esferas, teremos uma pirâmide hexagonal regular de aresta lateral $3R$ e aresta da base $2R$. A altura h da pirâmide, a aresta lateral e o raio da circunferência circunscrita ao hexágono da base, que tem mesma medida da aresta da base, formam um triângulo retângulo. Temos então:

$$\begin{aligned} h^2 + (2R)^2 &= (3R)^2 \\ h^2 &= 9R^2 - 4R^2 \\ h^2 &= 5R^2 \\ h &= R\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Como a distância do centro da sétima esfera à superfície horizontal é a altura da pirâmide mais a distância do centro de uma das outras esferas à mesma superfície, temos que esta distância é $R\sqrt{5} + R = R(1 + \sqrt{5})$.



ELABORADO POR CLEBER ASSIS E TIAGO MIRANDA
 PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
 CONTATO@CURSOARQUIMEDES.COM