Sistemas Lineares e Geometria Analítica

Sistemas de Três Variáveis
Parte 2

3° ano E.M.

Material elaborado por Lorena Bulhosa

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Use interpretação geométrica para mostrar que os sistemas a seguir são impossíveis.

(a) $$\begin{cases} 4x+2y-2z=1 \\ 2x+y-z=\dfrac{1}{2} \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} -x+y+2z=4 \\ -3x+3y+6z=2 \\ x-y-2z=0 \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} 21x+33y+9z=1 \\ 14x+18y+10z=8 \\ 7x+11y+3z=3 \end{cases}$$

Exercício 2. Resolva o sistema linear:

$$\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ 3x+y+z=2 \\ 8x+y+6z=6 \end{cases}$$

Exercício 3. Mostre que o conjunto-solução dos seguintes sistemas possui infinitos pontos e interprete-os geometricamente.

(a) $$\begin{cases} 6x-3y+z=2 \\ 3x-\dfrac{3}{2}y+\dfrac{z}{2}=1 \\ 2x-y+\dfrac{z}{3}=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} 3x+9y+3z=3 \\ x+3y+z=1 \\ 3x+y+3z=1 \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ 3x+y+z=2 \\ 4x+3y-2z=3 \end{cases}$$

Exercício 4. Encontre a interseção dos planos $\pi_1 : x+2y+3z=1$, $\pi_2 : 2x+y+z=1$ e $\pi_3 : -x+3y=3$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 5. Resolva o sistema $\begin{cases} 5x-3y+2z=5 \\ 2x-y-z=1 \\ x-y+4z=1. \end{cases}$

Exercício 6. Determine o lugar geométrico representado pelo sistema

$$\begin{cases} 2x+10y-8z=2 \\ -3x+y=1 \\ x+5y-4=1 \end{cases}$$

Exercício 7. Determine a solução do sistema

$$\begin{cases} 2x+2y+3z=10 \\ 3x+y-z=0 \\ x+y+2z=6. \end{cases}$$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 8. Para que o sistema

$$\begin{cases} x-y+3z=2 \\ 2x-y+4z=n \\ -x+my-5z=0 \end{cases}$$

tenha infinitas soluções, qual deve ser o valor de $m+n$?

Exercício 9. Quais os valores de m e n para que o sistema

$$\begin{cases} 2x+z=1 \\ mx+3y+4mz=4 \\ 3x+mz=n \end{cases}$$

não tenha solução?

Exercício 10. Determine os valores de m e n para que o seguinte sistema tenha exatamente uma solução.

$$\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x+my+2z=4 \\ 3x+y+z=n \end{cases}$$

Respostas e Soluções.

Durante todo o caderno de respostas denote π_1, π_2 e π_3 os planos determinados pelas equações dos sistemas, na ordem em que aparecem no enunciado. Denote, respectivamente, u_1, u_2 e u_3 vetores normais a esses planos.

1. a) Da teoria vista na parte I deste material, já sabemos que podemos escolher $u_1 = (4, 2, -2)$, $u_2 = (2, 1, -1)$ e $u_3 = (2, 1, -1)$. Há uma proporcionalidade entre as coordenadas de u_1 e as de u_2, pois $\frac{4}{2} = \frac{2}{1} = \frac{-2}{-1}$. Ainda mais, a razão entre os termos independentes da primeira e da segunda equação é a mesma. Sendo assim, os planos π_1 e π_2 são coincidentes ($\pi_1 = \pi_2$). Da mesma forma, a razão entre os coeficiente de u_2 e u_3 é a mesma, contudo os termos independentes não têm a mesma proporcionalidade, o que significa que π_2 e π_3 são paralelos. Assim $\pi_1 = \pi_2 // \pi_3$. Dessa forma, a interseção desses planos é vazia e o sistema é impossível.

b) Sejam $u_1 = (-1, 1, 2)$, $u_2 = (-3, 3, 6)$ e $u_3 = (1, -1, -2)$. Note a proporcionalidade entre as coordenadas de u_1 e as de u_2. A mesma proporção não ocorre entre os termos independentes da primeira e da segunda equação. Sendo assim, os planos π_1 e π_2 são paralelos, mas não coincidentes ($\pi_1 // \pi 2$). Dessa forma, a interseção desses planos é vazia e o sistema é impossível (independente de π_3). Só por curiosidade, nesse caso tínhamos $\pi_1 // \pi_2 // \pi_3$.

c) Sejam $u_1 = (21, 33, 9)$, $u_2 = (14, 18, 10)$ e $u_3 = (7, 11, 3)$. Os vetores u_1 e u_2 não são proporcionais, logo π_1 e π_2 se intersectam em uma reta. Da mesma forma, π_2 e π_3 se intersectam em uma reta. Porém, são proporcionais os coeficientes de u_1 e u_3, pois $\frac{21}{7} = \frac{33}{11} = \frac{9}{3}$. Já os coeficientes independentes de π_1 e π_3 não têm essa mesma razão, então esses plano são paralelos, não coincidentes. Sendo assim, eles não se intersectam e o sistema é impossível (independente de π_2). Aqui $\pi_1 // \pi_3$, $\pi_1 \cap \pi_2 = r$, $\pi_2 \cap \pi_3 = s$ e $r // s$.

2. Sejam $u_1 = (1, 2, -3)$, $u_2 = (3, 1, 1)$ e $u_3 = (8, 1, 6)$. Os vetores u_1 e u_2 não são proporcionais, logo π_1 e π_2 se intersectam em uma reta. Da mesma forma, π_2 e π_3 se intersectam em uma reta e, também π_1 e π_3 se intersectam em uma reta. Vamos denotar $r = \pi_1 \cap \pi_2$, achar a equação de r (usando os métodos da parte I) e, em seguida, encontrar a interseção de r com π_3.

O vetor $u = u_1 \times u_2 = (5, -10, -5)$ é ortogonal a u_1 e u_2, logo é paralelo a π_1 e π_2, e, portanto, também é paralelo à reta r. Para facilitar os cálculos vamos escolher $v = u/5 = (1, -2, -1)$ que também é paralelo à r. Para achar um ponto particular de r, escolha por exemplo $x = 0$ nas equações de π_1 e π_2, o que implica $y = 7/5$ e $z = 3/5$. Assim, $P = (0, 7/5, 3/5)$ é um ponto particular de r. Um ponto em r é da forma $P + tv = (t, 7/5 - 2t, 3/5 - t)$, para algum $t \in \mathbb{R}$. Substituindo na equação de π_3, verificamos que $8t + (7/5 - 2t) + 6(3/5 - t) = 5 \neq 6$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, nenhum ponto da reta r pertence a π_3. Segue que $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = r \cap \pi_3 = \emptyset$. Assim o sistema é impossível e tem conjunto-solução vazio.

3. a) Sejam $u_1 = (6, -3, 1)$, $u_2 = (3, -3/2, 1/2)$ e $u_3 = (2, -1, 1/3)$. Os coeficientes de u_1 e u_2 são proporcionais, pois $\frac{6}{3} = \frac{-3}{-3/2} = \frac{1}{1/2} = 2$. A razão entre os coeficientes independentes nas equações de π_1 e π_2 também é 2, logo esses planos são coincidentes. O mesmo pode ser visto entre os planos π_2 e π_3. Assim, $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$. Segue que o sistema tem apenas uma equação (já que as outras duas são equivalentes) e, portanto, duas variáveis livres. O próprio plano π_1 ($= \pi_2 = \pi_3$) é solução. O conjunto-solução pode ser escrito como

$$S = \{(x, y, 2 - 6x + 3y); x, y \in \mathbb{R}\}.$$

b) Sejam $u_1 = (3, 9, 3)$, $u_2 = (1, 3, 1)$ e $u_3 = (3, 1, 3)$. Os coeficientes de u_1 e u_2 são proporcionais. A mesma razão é obedecida pelos coeficientes independentes nas equações de π_1 e π_2, logo esses planos são coincidentes. Os coeficientes de u_2 e u_3 não são proporcionais, logo π_2 e π_3 se intersectam em uma reta, digamos r. Assim, $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \pi_2 \cap \pi_3 = r$ e a solução do sistema são os pontos de r. Usando os métodos da parte I, vamos achar a equação de r.

O vetor $u = u_2 \times u_3 = (8, 0, -8)$ é ortogonal a u_2 e u_3, logo é paralelo a π_2 e π_3, e, portanto, também é paralelo à reta r. Para facilitar os cálculos vamos escolher $v = u/8 = (1, 0, -1)$ que também é paralelo à r. Para achar um ponto particular de r, escolha por exemplo $x = 0$ nas equações de π_2 e π_3, o que implica $y = z = 1/4$. Assim, $P = (0, 1/4, 1/4)$ é um ponto particular de r. Um ponto em r pode ser escrito na forma $P + tv = (t, 1/4, 1/4 - t)$, para algum $t \in \mathbb{R}$. O conjunto-solução do sistema pode ser escrito como

$$S = \{(t, 1/4, 1/4 - t); t \in \mathbb{R}\}.$$

c) Sejam $u_1 = (1, 2, -3)$, $u_2 = (3, 1, 1)$ e $u_3 = (4, 3, -2)$. Os vetores u_1 e u_2 não são proporcionais, logo π_1 e π_2 se intersectam em uma reta. Da mesma forma, π_2 e π_3 se intersectam em uma reta e, também π_1 e π_3 se intersectam em uma reta. Vamos denotar $r = \pi_1 \cap \pi_2$, achar a equação de r (usando os métodos da parte I) e, em seguida, encontrar a interseção de r com π_3.

As equações de π_1 e π_2 são as mesmas dos planos na questão 2, logo a reta r já foi encontrada nessa questão. Um ponto da reta r pode ser escrito como $P + tv = (t, 7/5 - 2t, 3/5 - t)$, para algum $t \in \mathbb{R}$. Substituindo na equação de π_3, verificamos que $4t + 3(7/5 - 2t) - 2(3/5 - t) = 3$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, a reta r pertence a π_3. Segue que $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = r \cap \pi_3 = r$ e os pontos de r são as infinitas soluções do sistema. O conjunto-solução é

$$S = \{(t, 7/5 - 2t, 3/5 - t); t \in \mathbb{R}\}.$$

4. Sejam $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (2, 1, 1)$ e $u_3 = (-1, 3, 0)$. Os vetores u_1 e u_2 não são proporcionais, logo π_1 e π_2 se intersectam em uma reta. Da mesma forma, π_2 e π_3 se intersectam em uma reta e, também π_1 e π_3 se intersectam em uma reta. Vamos denotar $r = \pi_2 \cap \pi_3$, achar a equação de r e, em seguida, encontrar a interseção de r com π_1.

O vetor $u = u_2 \times u_3 = (-3, -1, 7)$ é ortogonal a u_2 e u_3, logo é paralelo a π_2 e π_3, e, portanto, também é paralelo à reta r. Para achar um ponto particular de r, escolha por exemplo $x = 0$ nas equações de π_2 e π_3, o que implica $y = 1$ e $z = 0$. Assim, $P = (0, 1, 0)$ é um ponto particular de r. Um ponto em r pode ser escrito como $P + tv = (-3t, 1 - t, 7t)$, para algum $t \in \mathbb{R}$. Substituindo na equação de π_1,

$$-3t + 2(1 - t) + 3(7t) = 1 \Rightarrow t = -1/16.$$

O valor de $t = -1/16$ corresponde ao ponto $Q = (3/16, 17/16, -7/16)$. Segue que $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \pi_1 \cap r = \{Q\}$. O conjunto-solução é o unitário $S = \{(3/16, 17/16, -7/16)\}$.

5. Sejam $u_1 = (5, -3, 2)$, $u_2 = (2, -1, -1)$ e $u_3 = (1, -1, 4)$. Como antes note a razão entre os coeficientes e veja que os planos π_1, π_2 e π_3 se intersectam dois a dois. Denote r a interseção entre π_1 e π_2. Usando a mesma técnica dos exercícios anteriores, encontro um ponto particular de r, $P = (0, -7/5, 2/5)$ e um vetor paralelo à r, $u = u_1 \times u_2 = (5, 9, 1)$. Assim, um ponto de r tem a forma $P + tu = (5t, -7/5 + 9t, 2/5 + t)$ para algum $t \in \mathbb{R}$. Basta encontrar agora a interseção entre r e π_3. Substituindo as coordenadas de um ponto em r na equação de π_3,

$$5t - (-7/5 + 9t) + 4(2/5 + t) = 3 \neq 1,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, nenhum ponto de r está em π_3. Resumindo $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = r \cap \pi_3 = \emptyset$. Assim, o sistema é impossível e tem conjunto-solução vazio.

6. Todos os coeficientes de π_1 e π_3 são proporcionais, logo esses planos são coincidentes ($\pi_1 = \pi_3$). Os coeficientes das variáveis nas equações de π_2 e π_3 não são proporcionais, logo esses planos se intersectam em uma reta, a qual denotamos r. Assim, $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \pi_2 \cap \pi_3 = r$. Basta agora determinar essa reta. Encontramos um ponto particular de r, por exemplo $P = (0, 1, 1)$ e um vetor paralelo à r, $u = u_2 \times u_3 = (-4, -12, -16)$. Os pontos de r podem ser escritos como $P + tu = (-4t, 1 - 12t, 1 - 16t)$, para algum $t \in \mathbb{R}$. Assim, o lugar geométrico é a reta dada pelo conjunto de pontos $S = \{(t, 1 + 3t, 1 + 4t); t \in \mathbb{R}\}$.

7. Os coeficientes das variáveis nas equações de π_2 e π_3 não são proporcionais, logo esses planos se intersectam em uma reta, a qual denotamos r. Vamos encontrar a equação de r e, em seguida, a interseção de r com π_1. Encontramos um ponto particular de r, por exemplo $P = (0, 2, 2)$ e um vetor paralelo à r, $u = u_2 \times u_3 = (3, -7, 2)$. Os pontos de r podem ser escritos como $P + tu = (-3t, 2 - 7t, 2 + 2t)$, para algum $t \in \mathbb{R}$. Substituindo as coordenadas de um ponto em r na equação de π_1,

$$2(-3t) + 2(2 - 7t) + 3(2 + 2t) = 10 \Rightarrow t = 0,$$

logo a interseção entre r e π_1 é o próprio ponto P. Assim, $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \pi_1 \cap r = P$ e o conjunto-solução do sistema é $S = \{(0, 2, 2)\}$.

8. Pelos coeficientes das equações, sabemos que os planos que as equações representam se intersectam dois a dois em uma reta. Para que o sistema tenha infinitas soluções essas retas devem ser a mesma, ou seja, os três planos devem se intersectar em uma reta, digamos r.

A reta r, estando contida em cada um dos três planos, é perpendicular aos vetores normais aos planos, logo estes vetores são coplanares e $u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2$, o que implica $a_3 = \alpha a_1 + \beta a_2$, $b_3 = \alpha b_1 + \beta b_2$ e $c_3 = \alpha c_1 + \beta c_2$, onde a_1, b_1, c_1 são os coeficientes na equação de π_1 e o mesmo para π_2 e π_3. Tomando um ponto qualquer (x_0, y_0, z_0) em r teremos $a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 z_0 = d_1$, $a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 z_0 = d_2$ e

$$\begin{aligned} d_3 &= a_3 x_0 + b_3 y_0 + c_3 z_0 \\ &= (\alpha a_1 + \beta a_2) x_0 + (\alpha b_1 + \beta b_2) y_0 + (\alpha c_1 + \beta c_2) z_0 \\ &= \alpha d_1 + \beta d_2. \end{aligned}$$

Segue-se daí que $\pi_3 = \alpha \pi_1 + \beta \pi_2$. Reciprocamente, se valem estas condições algébricas (essa última igualdade e os vetores normais coplanares) então os planos π_1, π_2 e π_3 se intersectam em uma reta. Isto pode ser visto em *A Matemática do Ensino Médio, vol*3.

Resolvendo $\pi_3 = \alpha \pi_1 + \beta \pi_2$ encontramos $\alpha = -3$, $\beta = 1$, $m = 2$ e $n = 6$. Logo, $m + n = 8$.

9. Interpretando geometricamente, temos duas situações possívies: ao menos dois deles são paralelos distintos ou eles se intersectam dois a dois em retas paralelas.

No primeiro caso, já vemos pelos coeficientes que π_1 e π_2 se intersectam, assim como π_2 e π_3. Para π_1 e π_3 serem paralelos distintos devemos ter $m = 3/2$ e $n \neq 3/2$.

No segundo caso, como não há paralelismo nem coincidência entre dois planos, nenhum dos vetores normais é múltiplo de outro. Suponha $\pi_1 \cap \pi_2 = r, \pi_2 \cap \pi_3 = s, \pi_3 \cap \pi_1 = t$. Os vetores u_1 e u_2 são ortogonais à r porque ela está contida em π_1 e π_2. O vetor u_3 é ortogonal a s porque esta reta está contida em π_3. Como $r//s$, vemos que u_1, u_2 e u_3 são ortogonais a r, portanto são coplanares: $u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2$. Mas não se pode ter $\pi_3 = \alpha \pi_1 + \beta \pi_2$, como na questão anterior onde r, s, t coincidem. Portanto, nesse caso devemos ter $u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2$ e $\pi_3 = \alpha \pi_1 + \beta \pi_2$. Reciprocamente, se essas condições valem, esse caso ocorre. Isto pode ser visto em *A Matemática do Ensino Médio, vol*3. Essas duas condições nos dão $m = 3/2$ e $n \neq 3/2$.

Resumindo os dois casos, devemos ter $m = 3/2$ e $n \neq 3/2$.

10. Do ponto de vista algébrico, isto ocorre se, e somente se, os vetores-linha u_1, u_2, u_3 da matriz do sistema são linearmente independentes. Note que se os planos se intersectam em um único ponto, eles não são paralelos, logo seus vetores normais não são múltiplos um do outro. Também não se pode ter $u_3 = \alpha u_2 + \beta u_3$, pois como visto nas duas questões anteriores, teríamos um sistema indeterminado ou impossível, conforme fosse $\pi_3 = \alpha \pi_1 + \beta \pi_2$ ou

$\pi_3 \neq \alpha\pi_1 + \beta\pi_2$.

Não vale que $u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2$ se $m \neq 2$. Então devemos ter $m \neq 2$ e n real qualquer.

Material elaborado por Lorena Bulhosa