Módulo de Matrizes e Sistemas Lineares

O Conceito de Matriz

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Matrizes e Sistemas Lineares
O Conceito de Matriz

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Determine a sua entrada a_{23}.

b) Determine a sua entrada a_{12}.

Exercício 2. Determine a soma dos elementos da diagonal principal da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercício 3. Determine a soma das entradas a_{ij} da matriz abaixo em que $i + j$ é ímpar.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 1 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Exercício 4. Determine a soma das entradas a_{ij}, com $i \neq j$, da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercício 5. Determine as transpostas das matrizes dadas:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

c)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercício 6. Enconte o valor de $c + d$ sabendo que as matrizes A e B, dadas abaixo, são iguais.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ d & 2 \end{pmatrix}$$

Exercício 7. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} d & c \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} d & 1 \\ 4 & d \end{pmatrix}$$

Sabendo $A^T = B$, determine os valores de c e d.

Exercício 8. Determine os valores de c e d de modo que a matriz A seja simétrica, isto é, que $A^T = A$.

$$A = \begin{pmatrix} c & c-d & 1 \\ d & 2 & 4 \\ 1 & 2d+c & 3 \end{pmatrix}$$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 9. Em cada item, escreva a Matriz $(A)_{3\times 3}$ em que suas entradas a_{ij} são dadas por :

a) $a_{ij} = i + j$.

b) $a_{ij} = i - j$.

c) $a_{ij} = i \cdot j$.

Exercício 10. As entradas a_{ij} da Matriz $(A)_{3\times 3}$ são dadas por $a_{ij} = 2i + j$. Determine A^T.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 11. Mostre que $(A^T)^T = A$.

Exercício 12. Determine o número de matrizes quadradas A de ordem 3 que são simétricas e que possuem todos as suas entradas no conjunto $\{0, 1, 2\}$.

Exercício 13. Alguns números reais estão escritos nas casa de uma matriz $n \times n$ de modo que a soma total dos números escritos é positiva. Mostre que existe alguma permutação das colunas da matriz de modo que a soma dos números escritos nas casas da diagonal principal da nova matriz é positiva.

Exercício 14. Alguns asteriscos estão escritos nas casas de uma matriz $m \times n (m < n)$, de modo que existe pelo menos um asterisco em cada coluna. Nas demais casas estão escritos o número 0. Mostre que que existe um asterisco A tal que $l_A > c_A$, onde l_A e c_A denotam as quantidade de asteriscos na linha e coluna de A, respectivamente.

Exercício 15. Sejam m e n inteiros maiores que 1. Seja $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, e sejam $A_1, A_2, \ldots, A_m$ suconjuntos de S. Assuma que para quaisquer dois elementos x e y em S, existe um conjunto A_i tal que ou x está em A_i e y não está em A_i ou x não está em A_i e y está em A_i. Prove que $n \leq 2^m$.

Exercício 16. Com os dígitos 1 e 2 formamos 5 números de n dígitos de tal forma que dois quaisquer destes números coincidam em exatamente m casas decimais e não existe nenhuma casa decimal onde coincidam os 5 números. Demonstre que:

$$\frac{2}{5} \leq \frac{m}{n} \leq \frac{3}{5}.$$

Respostas e Soluções.

1.

a) Temos $a_{23} = -4$.

b) temos $a_{12} = 2$.

2. A soma dos elementos da diagonal principal é $1 + 8 + 7 = 16$.

3. Temos $a_{12} = 4$, $a_{21} = 2$, $a_{23} = 1$ e $a_{32} = 5$. Portanto a soma procurada é $4 + 2 + 1 + 5 = 12$

4. A soma de todas as entradas da matriz é 18. Para encontrarmos a soma procurada, basta subtrairmos a soma dos elementos da diagonal principal. Portanto, a soma desejada é $18 - (1 + 3 + 0) = 14$.

5.

(a)

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Nesse exemplo, $A^T = A$, pois as entradas de A são simétricas em relação a sua diagonal principal.

6. Devemos ter $c = 4$ e $d = 1$. Portanto, $c + d = 5$.

7. Como $A^T = B$, segue que $c = 4$ e $d = 2$.

8. Para que A seja simétrica, devemos ter

$$\begin{cases} c - d = d \\ 2d + c = 4 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $d = 1$ e $c = 2$.

9.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

10. A Matriz A é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Assim, sua transposta é:

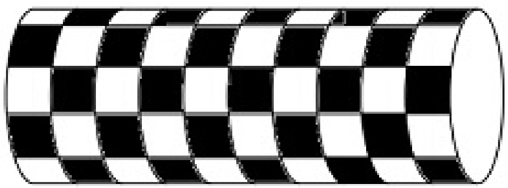
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

11. Sejam a_{ij} as entradas da matriz A. Então $A^T = (b_{ij})$ com $b_{ij} = a_{ji}$. Consequentemente, as entradas de $(A^T)^T$, que são dadas por b_{ji}, correspondem a a_{ij}, ou seja, são iguais as entradas de A.

12. Podemos escolher os 3 elementos da diagonal principal de $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$ maneiras. Uma vez que eles tenham sido escolhidos, basta escolhermos as entradas a_{12}, a_{13} e a_{23}, pois as outras entradas serão simétricas a elas em relação a diagonal principal. Podemos escolher essas entradas de $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$ maneiras. Assim, o total de matrizes é $3^3 \cdot 3^3 = 3^6$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \star & a_{22} & a_{23} \\ \star & \star & a_{33} \end{pmatrix}$$

13. Imagine que a matriz é um tabuleiro e crie um cilindro como indicado na figura abaixo. Esse cilindro pode ser decomposto em n diagonais disjuntas que começam em um extremo do cilindro e terminam no outro. Como a soma de todos os números do tabuleiro é positiva, pelo menos uma das diagonais terá soma positiva. Ela correponde a uma permutação das colunas do tabuleiro que satisfaz as condições do problema.



14. Para exemplificar o método da solução, considere a matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & \star & 0 & 0 \\ \star & 0 & \star & 0 \\ 0 & \star & 0 & \star \end{pmatrix}$$

Dada a matriz do problema, construa duas outras matrizes auxiliares, trocando apenas as entradas com asteriscos, a primeira em que a entrada a_{ij} é igual ao inverso da quantidade de asteriscos da linha i e a segunda em que a entrada b_{ij} é igual ao inverso da quantidade de asteriscos da coluna. As matrizes associadas ao exemplo anterior são:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Com essa construção, analisando a soma por linhas, descobrimos que a soma dos elementos da primeira matriz é m. Analisando a soma por colunas, descobrimos que a soma dos elementos da segunda matriz é n. Como $m < n$, pelo menos alguma das frações em uma casa que possuía asterisco na primeira matriz deve ser menor que a soma correspondente na segunda matriz, ou seja, $1/l_A < 1/c_A$. Daí $c_A < l_A$.

15. (Extraído da Olimpíada Búlgara) Considere uma matriz $m \times n$ em que na entrada a_{ij} escrevemos 1 se $j \in S_i$ e 0 caso contrário. A condição dada implica que não existem duas colunas iguais. Como o número máximo de colunas distintas com os símbolos 0's e 1's é 2^m, para que não exista repetição delas, devemos ter $n \leq 2^m$.

16. Considere uma matriz $5 \times n$ na qual cada linha contém os n dígitos dos números dados. Para cada par de linhas, podemos contar o número de colunas em que elas coincidem. Somando o número obtido para cada um dos $\binom{5}{2} = 10$ pares de linhas, obtemos o número $10m$. Por outro lado, como existem n colunas e em cada uma existem no máximo 4 e no mínimo 2 números de um mesmo tipo, o número total de pares de entradas coincidentes em duas linhas é limitado superiormente por $\binom{4}{2}n$ e inferiormente por $(\binom{3}{2} + \binom{2}{2})n$, ou seja,

$$4n \leq 10m \leq 6n$$

que produz

$$\frac{2}{5} \leq \frac{m}{n} \leq \frac{3}{5}.$$

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com