Inequações Produto e Quociente de Primeiro Grau

Sistemas de Inequações do Primeiro Grau

1° ano E.M.

Material elaborado por Lorena Bulhosa

Inequações Produto e Quociente de Primeiro Grau
Sistemas de Inequações do Primeiro Grau

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações simultâneas.

a) $-1 < 2x + 3 < 7$

b) $-2 \leq 5 - 2x < 1$

c) $-9 < 2x + 1 < x - 3$

d) $-2x + 1 < 2x + 2 \leq 3 - x$

e) $x + 1 < 4 - x < x/2 - 1$

f) $2x + 3 < 5 < x + 6$

Exercício 2. Resolva, em $\mathbb{R}$, os sistemas de inequações:

a) $\begin{cases} 3 - 2x \leq 5 \\ 4x - 2 \leq 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x - 1/2 < 3 \\ 8x + 2 \geq 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + 1 \geq 3 \\ 3x - 2 < 7 \\ 8x + 1 \geq 0 \end{cases}$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 3. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação simultânea.

$$3x + 1 < \frac{2x - 3}{-5} \leq x + 4$$

Exercício 4. Resolva os sistemas de inequações-produto:

a) $\begin{cases} -2(x+1)(3-x) > 0 \\ (2-x)(2+x) \leq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (3-x)(1+x) < 0 \\ (x-2)^2 > 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (1-x)(2+x) \geq 0 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases}$

Exercício 5. Obtenha o maior domínio possível D para as funções

a) $f(x) = \frac{x+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$

b) $g(x) = \frac{\sqrt{1-2x}-\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1-3x}}$

c) $h(x) = \frac{\sqrt{(x-2)(1-x)}}{2x-3}$

d) $j(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} + ...\sqrt{x-9} + \sqrt{x-10}$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 6. Determine o maior inteiro x que satisfaz o sistema

$$\begin{cases} 3x + 1 < 2x + 20 \\ x > 15 \\ \dfrac{x-1}{5} > \dfrac{4}{5}. \end{cases}$$

Exercício 7. Quantos números inteiros satisfazem as desigualdades abaixo?

$$3x - 10 \leq x - 2 < 4x + 1$$

Exercício 8. Determine o número de soluções inteiras do sistema de inequações a seguir.

$$\begin{cases} \dfrac{2x+1}{-2} < 5 \\ x + 1 \leq 2. \end{cases}$$

Exercício 9. Determine a soma dos quadrados dos números naturais que pertencem ao conjunto-solução de

$$\begin{cases} (3+x)(2-x) \geq 0 \\ x - 1 > 0. \end{cases}$$

Exercício 10. Seja x o número inteiro que satisfaz

$$2x \leq x + 3 < 4x - 3.$$

Qual o valor de x^2?

Exercício 11. (Unicamp) Três planos de telefonia celular são apresentados na tabela abaixo

Plano	Custo fixo mensal	Custo adicional por minuto
A	R$ 35	R$ 0,50
B	R$ 20	R$ 0,80
C	R$ 0	R$ 1,20

a) Qual é o plano mais vantajoso para alguém que utiliza 25 minutos por mês?
b) A partir de quantos minutos de uso mensal o plano A é mais vantajoso que os outros dois?

Respostas e Soluções.

1.

a) $\begin{cases} 2x+3<7 \Leftrightarrow x<2 \\ -1<2x+3 \Leftrightarrow x>-2 \end{cases}$

A solução é a interseção dos dois conjuntos, logo $S=]-2,2[$.

De outra forma,

$$-1<2x+3<7 \Leftrightarrow -4<2x<4 \Leftrightarrow -2<x<2$$

b) $\begin{cases} -2 \leq 5-2x \Leftrightarrow x \leq 7/2 \\ 5-2x<1 \Leftrightarrow x>2 \end{cases}$

A solução é a interseção dos dois conjuntos, logo $S=]2,7/2]$.

De outra forma,

$$-2 \leq 5-2x<1 \Leftrightarrow -7 \leq -2x<-4 \Leftrightarrow 7 \geq 2x>4$$

$$\Leftrightarrow 7/2 \geq x>2$$

c) $\begin{cases} -9<2x+1 \Leftrightarrow x>-5 \\ 2x+1<x-3 \Leftrightarrow x<-4 \end{cases}$

A solução é a interseção dos dois conjuntos, logo $S=]-5,-4[$.

d) $\begin{cases} -2x+1<2x+2 \Leftrightarrow x>-1/4 \\ 2x+2 \leq 3-x \Leftrightarrow x \leq 1/3 \end{cases}$

A solução é a interseção dos dois conjuntos, logo $S=]-1/4,1/3]$.

e) $\begin{cases} x+1<4-x \Leftrightarrow x<3/2 \\ 4-x \leq x/2-1 \Leftrightarrow x \geq 10/3 \end{cases}$

A solução é a interseção dos dois conjuntos, logo $S=\emptyset$.

f) $\begin{cases} 2x+3<5 \Leftrightarrow x<1 \\ 5<x+6 \Leftrightarrow x>-1 \end{cases}$

A solução é a interseção dos dois conjuntos, logo $S=]-1,1[$.

2.

a) $\begin{cases} 3-2x \leq 5 \Leftrightarrow x \geq -1 \\ 4x-2 \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 1 \end{cases}$

A interseção dos dois conjuntos é $S=[-1,1]$.

b) $\begin{cases} 7x-1/2<3 \Leftrightarrow x<1/2 \\ 8x+2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq -1/8 \end{cases}$

A interseção dos dois conjuntos é $S=[-1/8,1/2[$.

c) $\begin{cases} 4x+1 \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 1/2 \\ 3x-2<7 \Leftrightarrow x<3 \\ 8x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1/8 \end{cases}$

A interseção dos três conjuntos é $S=[1/2,3[$.

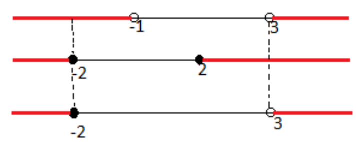
3.

$3x+1<\frac{2x-3}{-5} \leq x+4 \Leftrightarrow -5(3x+1)>2x-3 \geq -5(x+4)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -5(3x+1)>2x-3 \Leftrightarrow x<-2/17 \\ 2x-3 \geq -5(x+4) \leftrightarrow x \geq -17/7 \end{cases}$

A solução é a interseção dos dois conjuntos, então o conjunto-solução é $S=[\frac{-17}{7},\frac{-2}{17}[$.

4. a) A inequação $-2(x+1)(3-x)>0$ tem conjunto-solução $S_1=]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$. A inequação $(2-x)(2+x) \leq 0$ tem conjunto-solução $S_2=]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$. O conjunto-solução S é a interseção dos dois conjuntos: $S=S_1 \cap S_2=]-\infty,-2]\cup]3,+\infty[$.



b) A inequação $(3-x)(1+x)<0$ tem conjunto-solução $S_1=]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$. A inequação $(x-2)^2>0$ tem conjunto-solução $S_2=\mathbb{R} \setminus \{2\}$. O conjunto-solução S é a interseção dos dois conjuntos: $S=S_1 \cap S_2=S_1$.

c) A inequação $(1-x)(2+x) \geq 0$ tem conjunto-solução $S_1=[-2,1]$. A inequação $2x-1>0$ tem conjunto-solução $S_2=]1/2,+\infty[$. O conjunto-solução S é a interseção dos dois conjuntos: $S=S_1 \cap S_2=]1/2,1]$.

5. Aqui usamos que os radicandos devem ser não negativos e os denominadores das frações devem ser não nulos. Assim, os domínios procurados devem ser soluções dos seguintes sistemas.

a) $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>0 \Rightarrow D=\mathbb{R}_+^*$

b) $\begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ 1+2x \geq 0 \\ 1-3x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1/2 \\ x \geq -1/2 \\ x<1/3 \end{cases} \Rightarrow D=[-\frac{1}{2},\frac{1}{3}[$

c) $\begin{cases} (x-2)(1-x) \geq 0 \\ 2x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [1,2] \\ x \neq 3/2 \end{cases} \Rightarrow D=[1,\frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2},2]$

d) $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ \vdots \\ x-9 \geq 0 \\ x-10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 2 \\ \vdots \\ x \geq 9 \\ x \geq 10 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 10 \Rightarrow D = [10, +\infty[$

6.

$$\begin{cases} 3x+1 < 2x+20 \\ x > 15 \\ \dfrac{x-1}{5} > \dfrac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 19 \\ x > 15 \\ x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow 15 < x < 19$$

Os inteiros que satisfazem o sistema são $16, 17$ e 18. O maior deles é 18.

7.

$$3x-10 \leq x-2 < 4x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-10 \leq x-2 \\ x-2 < 4x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \leq 4.$$

Os inteiros que satisfazem o sistema são $0, 1, 2, 3, 4$. Logo, há 5 inteiros.

8.

$$\begin{cases} \dfrac{2x+1}{-2} < 5 \\ x+1 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 > -10 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -11/2 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-11}{2} < x \leq 1$$

Os inteiros que satisfazem o sistema são $-5, -4, -3, -2, -1, 0$ e 1. Logo, há 7 soluções inteiras.

9. $(3+x)(2-x) \geq 0$ tem conjunto-solução $]-1, 2]$ e $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Intersectando as soluções das duas inequações, temos conjunto-solução do sistema $]1, 2]$. O único natural que é solução é o número 2, o qual tem quadrado igual a 4.

10.

$$2x \leq x+3 < 4x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \leq x+3 \\ x+3 < 4x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x > 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2 < x \leq 3$$

O inteiro que satisfaz as desigualdes é $x = 3$. O valor de x^2 é 9.

11. Sejam y_A, y_B e y_C os custos mensais referentes aos planos A, B e C, respectivamente, e x a quantidade de minutos utilizados por mês. Assim,

$$\begin{cases} y_A = 35 + 0,5x \\ y_B = 20 + 0,8x \\ y_C = 0 + 1,20x. \end{cases}$$

a)

$$x = 25 \Rightarrow \begin{cases} y_A = R\$47,50 \\ y_B = R\$40 \\ y_C = R\$30, \end{cases}$$

logo o plano C é o mais vantajoso para quem utiliza 25 minutos por mês.

b) O plano A é mais vantajoso que os outros dois se vale o sistema

$$\begin{cases} 35 + 0,5x < 20 + 0,8x \\ 35 + 0,5x < 0 + 1,20x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 50 \\ x > 30,435 \end{cases} \Leftrightarrow x > 50$$

Assim, o plano A é mais vantajoso a partir de 51 minutos por mês.

Material elaborado por Lorena Bulhosa