Introdução ao Cálculo - Limites - Parte 2

Resolução de Exercícios - Parte B

Introdução ao Cálculo

Material elaborado por Lorena Bulhosa

Introdução ao Cálculo - Limites - Parte 2
Resolução de Exercícios - Parte B

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Calcule os limites a seguir.

a) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

b) $\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

c) $\lim_{x \to 3\pi/2^-} x \operatorname{tg} x$

d) $\lim_{x \to \pi/2^+} \frac{\sec x}{\pi/2 - x}$

Exercício 2. Calcule os limites trigonométricos a seguir. Considere k, α, β constantes.

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin kx}{x}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin \alpha x}{\beta x}$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 3. Calcule os limites trigonométricos a seguir.

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{7x}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 (x/3)}{x^2}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x + \sin x}{x}$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos (x/3)}{x}$

e) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$

f) $\lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 4. Calcule o limite lateral

$$\lim_{x \to \pi/2^-} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x}.$$

Exercício 5. Calcule o limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^3 x}{\sin^2 x}.$$

Exercício 6. Calcule

$$\lim_{x \to \pi/4} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}.$$

Exercício 7. Calcule

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin (a+x) - \sin (a-x)}{x}.$$

Exercício 8. Calcule os limites

a) $\lim_{x \to 1} \frac{\cos (\pi x/2)}{1-x}$

b) $\lim_{x \to \pi/3} \frac{1 - 2\cos x}{\pi - 3x}$.

Respostas e Soluções.

1. a)

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

b)

$$\lim_{x\to9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}=\lim_{x\to9}\frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to9}\frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9}=\lim_{x\to9}\sqrt{x}+3=\sqrt{9}+3=6.$$

c) Uma vez que $\lim_{x\to3\pi/2^-}x=3\pi/2$ e $\lim_{x\to3\pi/2^-}\operatorname{tg}x=+\infty$,

$$\lim_{x\to3\pi/2^-}x.\operatorname{tg}x=+\infty.$$

d)

$$\lim_{x\to\pi/2^+}\frac{\sec x}{\pi/2-x}=\lim_{x\to\pi/2^+}\frac{1}{\cos x(\pi/2-x)}$$

Quando $x\to\pi/2^+$, $\cos x\to0^-$ e $\pi/2-x\to0^-$, então

$$\cos x(\pi/2-x)\to0^+.$$

Assim,

$$\lim_{x\to\pi/2^+}\frac{1}{\cos x(\pi/2-x)}=+\infty.$$

2. a)

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos x}\frac{1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}.\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=1.1=1.$$

b)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin kx}{x}=\lim_{x\to0}k\frac{\sin kx}{kx}=k\lim_{x\to0}\frac{\sin kx}{kx}=k.1=k$$

c)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\lim_{x\to0}\frac{\alpha}{\beta}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\frac{\beta x}{\sin\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}\lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\frac{\beta x}{\sin\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}\lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}.\lim_{x\to0}\frac{\beta x}{\sin\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}.1.1=\frac{\alpha}{\beta}.$$

d)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to0}\cos x=1.$$

3. a)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{7x}=\lim_{x\to0}4\frac{\sin4x}{7.4x}=\frac{4}{7}\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{4x}=\frac{4}{7}.1=\frac{4}{7}.$$

b)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2(x/3)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2(x/3)}{9(x/3)^2}=\frac{1}{9}\lim_{x\to0}\frac{\sin^2(x/3)}{(x/3)^2}=\frac{1}{9}\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin(x/3)}{(x/3)}\right)^2=\frac{1}{9}.1^2=\frac{1}{9}.$$

c)

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x+\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}+\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x\cos x}+1=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}.\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}+1=1.1+1=2.$$

d)

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x/3)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos(x/3))(1+\cos(x/3))}{x(1+\cos(x/3))}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2(x/3)}{x(1+\cos(x/3))}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2(x/3)}{x(1+\cos(x/3))}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2(x/3)}{x^2/9}\frac{x/9}{1+\cos(x/3)}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(x/3)}{x/3}\right)^2\frac{x/9}{1+\cos(x/3)}=1^2.\frac{0}{1+1}=0.$$

e)

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\sin x(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{x\sin x(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x\sin x(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{1+\cos x}=1.\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

f) Relembre a identidade

$$\sin x-\sin a=2\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\cos\left(\frac{x+a}{2}\right).$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)$$
$$=1.\cos(a)=\cos(a).$$

4. Note que $\lim_{x\to\pi/2^-}\sin x-\cos x=1-0=1$, enquanto $\lim_{x\to\pi/2^-}\operatorname{tg}x=\lim_{x\to\pi/2^-}\frac{\sin x}{\cos x}=+\infty$, uma vez que $\cos x\to 0^+$, quando $x\to\pi/2^-$. Assim,

$$\lim_{x\to\pi/2^-}\frac{\sin x-\cos x}{1-\operatorname{tg}x}=0.$$

5. Como $1-a^3=(1-a)(1+a+a^2)$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{\sin^2 x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{(1+\cos x)\sin^2 x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos^2 x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{(1+\cos x)\sin^2 x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x(1+\cos x+\cos^2 x)}{(1+\cos x)\sin^2 x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{1+\cos x}$$
$$=\frac{1+1+1^2}{1+1}=\frac{3}{2}.$$

6.

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\cos(2x)}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{\cos^2 x-\sin^2(x)}{\cos x-\sin x}$$
$$=\lim_{x\to\pi/4}\cos x+\sin x=\cos(\pi/4)+\sin(\pi/4)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}.$$

7.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{(a+x)-(a-x)}{2}\cos\frac{(a+x)+(a-x)}{2}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(x)\cos(a)}{x}$$
$$=2\cos(a)\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$$
$$=2\cos(a).$$

8. a) Quando $x\to 1$, a variável $u=1-x\to 0$ então, fazendo uma mudança de variáveis,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos(\pi x/2)}{1-x}=\lim_{u\to 0}\frac{\cos(\pi(1-u)/2)}{u}$$
$$=\lim_{u\to 0}\frac{\cos(\pi/2-\pi u/2)}{u}.$$

Como

$$\cos(\pi/2-\pi u/2)=\cos(\pi/2)\cos(\pi u/2)+\sin(\pi/2)\sin(\pi u/2),$$

$\cos(\pi/2)=0$ e $\sin(\pi/2)=1$, então

$$\lim_{u\to 0}\frac{\cos(\pi/2-\pi u/2)}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin(\pi u/2)}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{\pi}{2}\frac{\sin(\pi u/2)}{\pi u/2}$$
$$=\frac{\pi}{2}\lim_{u\to 0}\frac{\sin(\pi u/2)}{\pi u/2}=\frac{\pi}{2}.1=\frac{\pi}{2}.$$

b) Quando $x\to\pi/3$, a variável $u=\pi-3x\to 0$ então, fazendo uma mudança de variáveis,

$$\lim_{x\to\pi/3}\frac{1-2\cos x}{\pi-3x}=\lim_{u\to 0}\frac{1-2\cos(\pi/3-u/3)}{u}.$$

Como

$$\cos(\pi/3-u/3)=\cos(\pi/3)\cos(u/3)+\sin(\pi/3)\sin(u/3),$$

$\cos(\pi/3)=1/2$ e $\sin(\pi/3)=\sqrt{3}/2$, então

$$\lim_{u\to 0}\frac{1-2\cos(\pi/3-u/3)}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{1-\cos(u/3)-\sqrt{3}\sin(u/3)}{u}$$
$$=\lim_{u\to 0}\frac{1-\cos(u/3)}{u}-\lim_{u\to 0}\frac{\sqrt{3}\sin(u/3)}{u},$$

caso os dois limites existam e a diferença entre eles não seja uma indeterminação.

Vimos na questão $3d$ que o primeiro limite vale zero. Procedendo como na questão $2b$, o segundo limite vale $\sqrt{3}.1/3=\sqrt{3}/3$. Assim, os dois limites existem e a solução é $0-\sqrt{3}/3=-\sqrt{3}/3$.

Material elaborado por Lorena Bulhosa