

# Trigonometria III

## Exercícios de Funções Trigonômicas I

2º ano E.M.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda



## 1 Exercícios Introdutórios

**Exercício 1.** Seja  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ . O valor de  $x$  tal que  $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$  é:

- a)  $\frac{\pi}{2}$ .
- b)  $\frac{\pi}{3}$ .
- c)  $\frac{\pi}{4}$ .
- d)  $\frac{\pi}{5}$ .
- e)  $\frac{\pi}{6}$ .

**Exercício 2.** O valor de  $\operatorname{tg} 150^\circ + 2 \operatorname{sen} 120^\circ - \cos 330^\circ$  é:

- a)  $\sqrt{3}$ .
- b)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ .
- c)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .
- d)  $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ .
- e)  $\frac{\sqrt{3}}{6}$ .

**Exercício 3.** O valor máximo da função  $f(x) = 3 + 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ , sendo  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , é:

- a) 1.
- b) 2.
- c) 3.
- d) 4.
- e) 5.

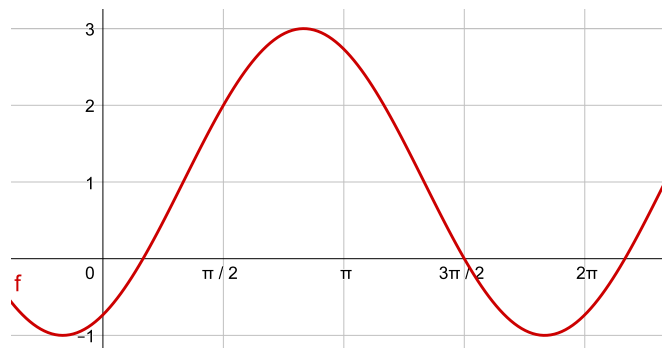
**Exercício 4.** Seja a função  $f(x) = 2 - 3 \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ , definida em  $[0, 2\pi] - A$ . O conjunto  $A$  é composto por quantos elementos?

- a) 1.
- b) 2.
- c) 3.
- d) 4.
- e) 5.

**Exercício 5.** A diferença entre o maior e o menor valor da função  $g(x) = 4 + 2 \operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ , definida em  $\mathbb{R}$ , é:

- a) 2.
- b) 4.
- c) 6.
- d) 8.
- e) 10.

**Exercício 6.** Observe o gráfico da função  $f(x) = a + b \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ . O valor de  $a \cdot b$ , sendo  $\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$  um dos pontos do gráfico, é:



- a) 1.
- b) 2.
- c) 3.
- d) 4.
- e) 5.

**Exercício 7.** Seja  $x$  um arco tal que  $\operatorname{sen} x > 0$  e  $\operatorname{tg} x < 0$ , então  $x$  é um arco de qual quadrante?

- a) 1º.
- b) 2º.
- c) 3º.
- d) 4º.

## 2 Exercícios de Fixação

**Exercício 8.** Uma pessoa usa um programa de computador que descreve o desenho da onda sonora correspondente a um som escolhido. A equação da onda é dada, num sistema de coordenadas cartesianas, por  $y = a \cdot \operatorname{sen}(b(x + c))$ , em que os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$  são positivos. O programa permite ao usuário provocar mudanças no som, ao fazer alterações nos valores desses parâmetros. A pessoa deseja tornar o som mais agudo e, para isso, deve diminuir o período da onda. Qual(is) é(são) o(s) único(s) parâmetro(s) que necessita(m) ser alterado(s)?

**Exercício 9.** O horário do nascer do e do pôr do sol depende de diversos fatores, especialmente da latitude do observador e do dia do ano (posição da Terra ao longo de sua órbita em torno do Sol). No início do verão do Hemisfério Sul, o tempo em horas,  $T$ , entre o nascer e o pôr do sol, para latitudes entre zero e 40 graus sul, pode ser calculado aproximadamente, com erro de alguns minutos, pela função  $T = 12 + 3,31 \operatorname{tg} \theta$ , em que  $\theta$  é a latitude local. Tendo em vista essas informações, no dia que marca o início do verão, qual é, aproximadamente, a diferença entre o total de horas de Sol na cidade de Porto Alegre, cuja latitude é de 30 graus sul, e na cidade de Macapá, que está sobre a Linha do Equador?

- a) 1 hora e 24 minutos.
- b) 1 hora e 40 minutos.
- c) 1 hora e 54 minutos.
- d) 3 hora e 20 minutos.
- e) 3 hora e 31 minutos.

**Exercício 10.** Suponha que uma revista publicou um artigo no qual era estimado que no ano  $2015 + x$ , com  $x \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$ , o valor arrecadado dos impostos incidentes sobre as exportações em certo país, em milhões de dólares, poderia ser obtido pela função  $f(x) = 250 + 12 \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ . Caso essa previsão se confirme, então, relativamente ao total arrecadado a cada ano considerado, é correto afirmar que:

- a) o valor máximo ocorrerá apenas em 2021.
- b) atingirá o valor mínimo apenas em duas ocasiões.
- c) poderá superar 300 milhões de dólares.
- d) nunca será inferior a 250 milhões de dólares.

**Exercício 11.** O arco que tem medida  $x$  em radianos é tal que  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  e  $\operatorname{tg} x = -\sqrt{2}$ . O valor do  $\operatorname{sen} x$  é:

- a)  $\sqrt{3}$ .
- b)  $\sqrt{2}$ .
- c)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .
- d)  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .
- e)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Exercício 12.** Sendo  $f(x) = -4 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2 \cos x$ , o valor de  $f\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$  é:

- a)  $\sqrt{2}$ .
- b) 2.
- c)  $-\sqrt{2}$ .

d) -1.

e)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Exercício 13.** Se  $\cos x + \operatorname{sen} x = \sqrt{2}$ , então  $\operatorname{sen}(2x)$  é:

- a) -1.
- b) 0.
- c) 1.
- d) 2.
- e) 3.

**Exercício 14.** Se  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a função definida por  $g(x) = 3x + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ . Então o valor da soma  $g(2) + g(3) + \dots + g(11)$  é:

- a) 183.
- b) 187.
- c) 190.
- d) 194.

### 3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

**Exercício 15.** A razão entre o maior e o menor número inteiro que pertencem ao conjunto imagem da função trigonométrica  $g(x) = -4 + 2 \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$  é:

- a) 2.
- b)  $\frac{1}{3}$ .
- c) -3.
- d)  $-\frac{1}{2}$ .

**Exercício 16.** Cerca de 24,3% da população brasileira é hipertensa, quadro que pode ser agravado pelo consumo excessivo de sal. A variação da pressão sanguínea  $P$  (em mmHg) de certo indivíduo é expressa em função do tempo, em segundos, por

$$P(t) = 100 - 20 \cdot \cos\left(\frac{8\pi}{3}t\right).$$

Analise as afirmativas:

- I) A frequência cardíaca desse indivíduo é de 80 batimentos por minuto.
- II) A pressão em  $t = 2$  segundos é de 110 mmHg.
- III) A amplitude da função  $P(t)$  é de 30 mmHg.

Está(ão) correta(s):

- a) apenas I.
- b) apenas I e II.
- c) apenas III.
- d) apenas II e III.
- e) I, II e III.

**Exercício 17.** A população de peixes em uma lagoa varia conforme o regime de chuvas da região. Ela cresce no período chuvoso e decresce no período de estiagem. Esta população é descrita pela expressão  $p(t) = 10^3 \left( \cos \left( \frac{t-2}{6} \pi \right) + 5 \right)$  em que o tempo  $t$  é medido em meses. É correto afirmar que:

- a) o período chuvoso corresponde a dois trimestres do ano.
- b) a população atinge seu máximo em  $t = 6$ .
- c) o período de seca corresponde a 4 meses do ano.
- d) a população média anual é de 6000 animais.
- e) a população atinge seu mínimo em  $t = 4$  com 6000 animais.

**Exercício 18.** Um técnico precisa consertar o termostato do aparelho de ar-condicionado de um escritório, que está desregulado. A temperatura  $T$ , em graus Celsius, no escritório, varia de acordo com a função  $T(h) = A + B \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{12} (h - 12) \right)$ , sendo  $h$  o tempo, medido em horas, a partir da meia-noite ( $0 \leq h \leq 24$ ), e  $A$  e  $B$  os parâmetros que o técnico precisa regular. Os funcionários do escritório pediram que a temperatura máxima fosse  $26^\circ$ , a mínima  $18^\circ$  e que durante a tarde a temperatura fosse menor do que durante a manhã. Quais devem ser os valores de  $A$  e  $B$  para que o pedido dos funcionários seja atendido?

- a)  $A = 18$  e  $B = 8$ .
- b)  $A = 22$  e  $B = -4$ .
- c)  $A = 22$  e  $B = 4$ .
- d)  $A = 26$  e  $B = -8$ .
- e)  $A = 26$  e  $B = 8$ .

**Exercício 19.** Considerando-se  $x$  o menor valor positivo em que a função  $g(x) = 20 + \cos \left( x + \frac{2\pi}{3} \right)$  atinge seu valor máximo  $y$ , pode-se afirmar que o valor de  $\frac{xy}{\pi}$  é

- a) 31.
- b) 28.
- c) 21.
- d) 20.
- e) 19.

**Exercício 20.** Um paciente é monitorado por um aparelho que registra, na tela, uma curva representativa da variação da pressão arterial. Em termos numéricos, a pressão é dada na forma  $S$  por  $D$ , sendo  $S$  o valor máximo atingido quando o coração se contrai e bombeia o sangue e  $D$ , o valor mínimo atingido quando o coração está em repouso, sendo que um batimento ocorre no intervalo de tempo entre duas pressões máximas consecutivas. Sabendo-se que a variação da pressão desse paciente foi modelada através da função  $P(t) = A + B \cos(Ct)$ , em que  $A$ ,  $B$  e  $C$  são números reais, constantes, não nulos e que o tempo  $t$  é dado em segundos, pode-se afirmar que, se a pressão for de 13 por 7 e o intervalo de tempo de um batimento cardíaco de 0,8 segundos,  $ABC$  será igual a:

- a) 54.
- b) 105.
- c)  $75\pi$ .
- d)  $91\pi$ .
- e)  $195\pi$ .

## Respostas e Soluções.

1. B.

2.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 150^\circ + 2 \operatorname{sen} 120^\circ - \operatorname{cos} 330^\circ &= \\ -\operatorname{tg} 30^\circ + 2 \operatorname{sen} 60^\circ - \operatorname{cos} 30^\circ &= \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} &= \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} &= \\ \frac{-2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{6} &= \\ \frac{\sqrt{3}}{6}. \end{aligned}$$

Resposta E.

3. O valor máximo da função ocorre quando  $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$ . Sendo assim,  $f_{\max} = 3 + 2 \cdot 1 = 5$ . Resposta E.

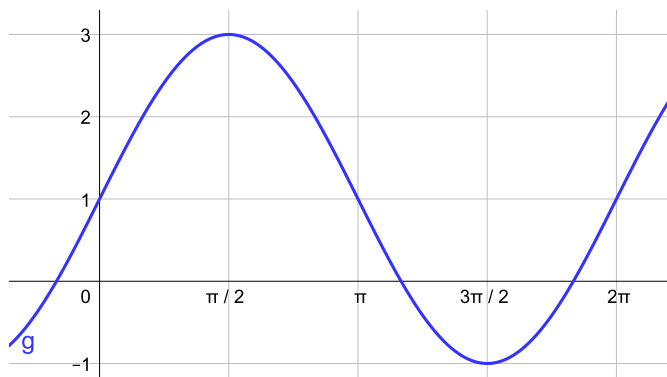
4. Seja  $k \in \mathbb{Z}$ , então:

$$\begin{aligned} 2x - \frac{\pi}{3} &\neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x &\neq \frac{5\pi}{6} + k\pi \\ x &\neq \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \\ x &\neq \frac{(5 + 6k)\pi}{12}. \end{aligned}$$

Como  $0 \leq x \leq 2\pi$ , então  $k = \{0, 1, 2, 3\}$ . Resposta D.

5. O maior valor ocorre quando  $\operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$  e o menor quando  $\operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$ . Portanto,  $g_{\max} - g_{\min} = (4 + 2 \cdot 1) - (4 - 2 \cdot 1) = 4$ . Resposta B.

6. Se  $\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$  é um dos pontos do gráfico, podemos deslocar o gráfico  $\frac{\pi}{3}$  para a esquerda e obter o gráfico da função  $g(x) = a + b \operatorname{sen} x$ :



Analisando o gráfico de  $g(x)$ , temos  $a = 1$  e  $b = 2$ . Portanto,  $a \cdot b = 2$ . Resposta B.

7. B.

8. (Extraído do ENEM/Vídeo Aula - Adaptado)  $y = a \cdot \operatorname{sen}(b(x+c)) = a \cdot \operatorname{sen}(bx+bc)$ . Portanto, o período é  $P = \frac{2\pi}{|b|}$ , sendo que para diminuí-lo é necessário aumentar o valor de  $|b|$ , ou seja, basta alterar o parâmetro  $b$ .

9. (Extraído da UFG-GO)

$$\begin{aligned} |T_P - T_M| &= |(12 + 3,31 \operatorname{tg} 30^\circ) - (12 + 3,31 \operatorname{tg} 0^\circ)| \\ &= |3,31(\operatorname{tg} 30^\circ - \operatorname{tg} 0^\circ)| \\ &= 3,31 \left( \frac{\sqrt{3}}{3} - 0 \right) \\ &\cong 1,91 \\ &\cong 1h54min. \end{aligned}$$

Resposta C.

10. (Extraído da PUC/SP) B. Valor mínimo ocorre com  $\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) = -1$ . Seja  $k \in \mathbb{Z}$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{3}x &= \pi + 2k\pi \\ \frac{x}{3} &= 1 + 2k \\ x &= 3 + 6k. \end{aligned}$$

Assim,  $k = \{0, 1\}$ , ou seja, atingirá valor mínimo apenas em duas ocasiões.

11. (Extraído da PUC - MG)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= -\sqrt{2} \\ \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} &= -\sqrt{2} \\ \operatorname{sen} x &= -\sqrt{2} \operatorname{cos} x \\ (\operatorname{sen} x)^2 &= 2(\operatorname{cos} x)^2 \\ (\operatorname{sen} x)^2 &= 2(1 - (\operatorname{sen} x)^2) \\ 3(\operatorname{sen} x)^2 &= 2 \\ \operatorname{sen} x &= \pm \frac{\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

Como  $x$  é um arco do segundo quadrante, então  $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{6}}{3}$ .

Resposta D.

12. (Extraído da UEPB/Vídeo Aula)

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{7\pi}{4}\right) &= -4 \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{4}\right) + 2 \operatorname{cos}\left(-\frac{7\pi}{4}\right) \\ &= -4 \operatorname{cos}\left(\frac{9\pi}{4}\right) + 2 \operatorname{cos}\left(2\pi - \frac{7\pi}{4}\right) \\ &= -4 \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2 \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= -4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Resposta C.

13.

$$\begin{aligned}\cos x + \sin x &= \sqrt{2} \\ (\cos x + \sin x)^2 &= 2 \\ (\cos x)^2 + 2 \cos x \sin x + (\sin x)^2 &= 2 \\ 1 + 2 \cos x \sin x &= 2 \\ \sin(2x) &= 1.\end{aligned}$$

Resposta C.

14. (Extraído da UECE/Vídeo Aula) Analisando os valores de  $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ , com  $x$  inteiro variando de 2 a 11, temos  $\{0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1\}$ , cuja soma é  $-1$ . Como  $6 + 9 + 12 + \dots + 33 = \frac{(6 + 33) \cdot 10}{2} = 195$ , então  $g(2) + g(3) + \dots + g(11) = -1 + 195 = 194$ . Resposta D.

15. (Extraído da UERN/Vídeo Aula) Como  $Im = [-4 - 2, -4 + 2] = [-6, -2]$ , então  $\frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$ . Resposta B.

16. (Extraído do UFSM - 2015)

I)  $P = \frac{2\pi}{8\pi} = \frac{3}{4}$ . Assim, a frequência é  $\frac{1}{P} = \frac{4}{3}$  batimentos

por segundo, que equivale a  $\frac{4}{3} \cdot 60 = 80$  batimentos por minuto. Item verdadeiro.

II)  $P(2) = 100 - 20 \cos\left(\frac{16\pi}{3}\right) = 100 - 20 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 110$  mmHg. Item verdadeiro.

III) Como  $Im = [100 - 20, 100 + 20] = [80, 120]$ , a amplitude de  $P$  é  $120 - 80 = 40$  mmHg. Item falso.

Resposta B.

17. (Extraído da EsPCEx/Vídeo Aula) O período da função é  $P = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$ , ou seja, no intervalo de 12 meses (um ano), a função completa um ciclo, sendo metade deste ciclo crescente e metade decrescente, ou seja, em um ano o período de chuva corresponde a dois trimestres. Resposta A.

18. (Extraído do ENEM - 2015) Como  $Im = [A - |B|, A + |B|]$ , então temos:

$$\begin{cases} A + |B| = 26 \\ A - |B| = 18. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos  $A = 22$  e  $|B| = 4$ . Os valores de máximo e mínimo de  $\sin\left(\frac{\pi}{12}(h - 12)\right)$  são  $-1$  e  $1$ , sendo que estes valores ocorrem em  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ , sendo  $k \in \mathbb{Z}$ . Temos então:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\pi}{12}(h - 12)\right) &= \frac{\pi}{2} + k\pi \\ h - 12 &= 6 + 12k \\ h &= 18 + 12k.\end{aligned}$$

Assim, as temperaturas máxima e mínima ocorrem às 6h ( $k = -1$ ) e 18h ( $k = 0$ ). Como os funcionários preferem a menor temperatura a tarde, devemos ter temperatura mínima às 18h, sendo que neste horário  $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ , ou seja,  $B$  deve ser negativo ( $B = -4$ ). Resposta B.

19. (Extraído da UESB - BA - 2014) A função atinge seu valor máximo quando  $\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 1$ , ou seja,  $y = 21$  e, para  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $x + \frac{2\pi}{3} = 2k\pi$ , donde  $x$  (menor valor) é  $2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ . Portanto,  $\frac{xy}{\pi} = \frac{4\pi \cdot 21}{3\pi} = 28$ . Resposta B.

20. (Extraído da EBMSP - BA - Adaptado) Como  $B$  é não nulo, então  $Im = [A - B, A + B]$ , ou seja:

$$\begin{cases} A - B = 7 \\ A + B = 13. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, chegamos a  $A = 10$  e  $B = 3$ . Para  $t = 0$ , temos  $P(0) = 10 + 3 \cdot 1 = 13$ , que é valor máximo e, conseqüentemente, 0,8 segundos depois deve ser outro valor máximo, donde concluímos que o período é  $\frac{2\pi}{C} = 0,8$ , segue que  $C = \frac{5\pi}{2}$ . Portanto  $ABC = 10 \cdot 3 \cdot \frac{5\pi}{2} = 75\pi$ . Resposta C.