# Sistemas Lineares e Geometria Analítica

## Sistemas de Duas Variáveis

## $3^\circ$ ano E.M.

Material elaborado por Lorena Bulhosa

**Sistemas Lineares e Geometria Analítica**
Sistemas de Duas Variáveis

# 1 Exercícios Introdutórios

**Exercício 1.** Determine a posição relativa entre as retas.

a) $r: 3x + y - 1 = 0$ e $s: x - y - 1 = 0$

b) $r: 2x + y - 3 = 0$ e $s: x + y/2 - 2 = 0$

c) $r: x/2 - y - 3 = 0$ e $s: 5x - 10y - 30 = 0$

d) $r: 3x + 2 = 0$ e $s: y - 5 = 0$

e) $r: \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0$ e $s: x + y = 0$

f) $r: -3x + 5y + t = 0$ e $s: x - y + 5t = 0$

g) $r: 2x + y + t = 0$ e $s: 4x + 2y - 7 = 0$

h) $r: 5x + 8y + t = 0$ e $s: \sqrt{2}x - 3 = 0$

**Exercício 2.** Determine a interseção das retas $r: x + 2y - 3 = 0$ e $s: 5x - y + 10 = 0$.

**Exercício 3.** Mostre que as retas $r: 2x + 3y = 0$, $s: x + 5 = 2y$ e $t: 3x + y = -5$ concorrem num mesmo ponto.

**Exercício 4.** Mostre que as retas de equações $(m+1)x - 3my + 2 - m = 0$, $m \in \mathbb{R}$, passam por um mesmo ponto.

**Exercício 5.** Qual a distância da origem até o ponto de interseção das retas $r: x + 2y = 2$ e $s: 2x - y = 4$?

# 2 Exercícios de Fixação

**Exercício 6.** Para quais valores de $t$ as retas $r: (t+2)x + 4y - 1 = 0$ e $s: -x + (t-3)y + 1 = 0$ são coincidentes?

**Exercício 7.** Determine $m \in \mathbb{R}$ para que as retas $r: 2x + y = -3m$ e $s: mx + 4y = 2$ tenham:

a) um único ponto em comum.

b) nenhum ponto em comum.

**Exercício 8.** Determine a posição relativa entre as retas $r: (m-2)x - 4my - 1 = 0$ e $s: 3mx + (2m+1)y + 1 = 0$ em função de $m$.

**Exercício 9.** Determine a posição relativa entre as retas $r: 7mx - my - 2 = 0$ e $s: 14x - 2my - m = 0$ em função de $m$.

**Exercício 10.** O triângulo $ABC$ é determinado pelas retas $r, s$ e $t$. A reta $r$ é paralela ao eixo $y$ e passa pelo ponto $P(2,5)$. As retas $s$ e $t$ são $s: x - y + 1 = 0$ e $t: x + y - 7 = 0$. Determine o perímetro do triângulo.

# 3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

**Exercício 11.** Dada a equação da reta $r: 3x + y + 2 = 0$ determine:

a) a equação da reta paralela a $r$ que passa pela origem.

b) a equação da reta paralela a $r$ que passa por $P(1,-1)$.

**Exercício 12.** Dado o feixe de retas

$$k_1(x + 2y - 4) + k_2(10x - 4y + 1) = 0, k_1, k_2 \in \mathbb{R},$$

determine a reta $t$ do feixe que é paralela à reta $r: 3x + 4y - \sqrt{2} = 0$.

**Exercício 13.** Determine a equação da reta que intersecta simultaneamente os dois feixes de retas:
$(1)(2x + y - 1) + p(x - y + 1) = 0, p \in \mathbb{R}$
$(2)(x - y + 2) + q(3x + y - 1) = 0, q \in \mathbb{R}$

**Exercício 14.** Dadas as retas $r: y - 1 = 0$ e $s: x - 2y + 5 = 0$, obtenha a equação da reta $t$, concorrente com $r$ e com $s$ e paralela à reta $u: 5x + y = 0$.

**Exercício 15.** A altura e a mediana relativas ao vértice $B$ do triângulo $ABC$ estão contidas, respectivamente, em $r: 2x - 3y + 12 = 0$ e $s: 2x + 3y = 0$. Sendo $C = (4, -1)$, determine $A$ e $B$.

**Exercício 16.** Num triângulo $ABC$, o vértice $A$ pertence ao eixo das abscissas, o lado $AC$ está contido na reta $r: x + y + 5 = 0$ e o lado $BC$ está contido na reta $s: 2x = y + 2$. Determine $B$ de forma que a soma dos quadrados das medidas dos lados do triângulo é mínima.

**Exercício 17.** Considere o triângulo retângulo $ABC$ de hipotenusa $AC$. Sabendo que:

o ponto $C$ tem coordenadas $(-5, -4)$,

o lado $AB$ está sobre o eixo $x$,

o lado $AC$ está sobre a reta $r$ que é paralela à segunda bissetriz,

determine a área do triângulo.

**Respostas e Soluções.**

**1.** Dadas duas retas $r: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $s: a_2x + b_2y + c_2 = 0$, com os coeficientes de $s$ não nulos,

$$\begin{cases} r = s \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} \\ r//s \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2} \\ r \times s \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2} \end{cases}$$

a) $r$ e $s$ são concorrentes.
b) $r$ e $s$ são paralelas.
c) $r$ e $s$ são coincidentes.
d) A reta $r$ é vertical e a reta $s$ horizontal, logo formam ângulos diferentes com o eixo $x$ e são concorrentes.
e) $r$ e $s$ são coincidentes, pois seus coeficientes são proporcionais.
f) $r$ e $s$ são concorrentes, para todo $t$.
g) $r$ e $s$ são coincidentes se $t = -7/2$ e são paralelas caso contrário.
h) A reta $s$ é vertical e a reta $r$ não é, logo formam ângulos diferentes com o eixo $x$ e são concorrentes.

**2.** Basta resolver o sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ 5x - y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -17/11 \\ y = 25/11 \end{cases}$$

A interseção é o ponto $(-17/11, 25/11)$.

**3.**

- Vamos determinar o ponto de interseção entre duas das retas, digamos $r$ e $s$.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x + 5 = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = -15/7 \\ y = 10/7 \end{matrix}$$

- Agora basta mostrar que esse ponto pertence à outra reta, $t$. As coordenadas do ponto satisfazem a equação da reta, de fato

$$3.\left(\frac{-15}{7}\right) + \frac{10}{7} + 5 = 0.$$

Assim, as três retas concorrem no ponto $(-15/7, 10/7)$.

**4.**

- Solução 1. Escolhendo duas retas quaisquer do conjunto, por exemplo $r_1 : x + 2 = 0 (m = 0)$ e $r_2 : 3y + 3 = 0 (m = -1)$, temos a interseção entre elas no ponto $P = (-2, -1)$. Substituindo as coordenadas de $P$ na equação do conjunto,

$$(m + 1)(-2) - 3m(-1) + 2 - m = 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Assim, $P$ satisfaz a equação para qualquer valor de $m$, logo todas as retas do conjunto passam por $P$.

- Solução 2. Podemos olhar a equação como um polinômio na variável $m$:

$$(x + 2) + (x - 3y - 1)m = 0.$$

Assim, para que ele seja nulo para qualquer valor de $m$, devemos ter seus coeficientes nulos, isto é,

$$\begin{cases} x + 2 = 0 \\ x - 3y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2 \text{ e } y = -1.$$

Portanto as coordenadas do ponto $P = (-2, -1)$ anulam o polinômio para qualquer valor de $m$. Assim, para qualquer valor de $m$ escolhido, $P$ pertence à reta correspondente, logo $P$ passa por todas as retas.

**5.** As coordenadas do ponto de interseção das retas $r$ e $s$ é a solução do sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x - y = 4. \end{cases}$$

O ponto tem coordenadas $x = 2$ e $y = 0$, logo sua distância $d$ até a origem é

$$d = 2u.c.$$

**6.** Vamos analisar os pontos $t = -2$ e $t = 3$, onde os coeficientes podem se anular, separadamente.

$$t = -2 \Rightarrow \begin{cases} r : 4y - 1 = 0 \\ s : -x - 5y + 1 = 0 \end{cases}$$

É claro que a reta $r$ é horizontal e a reta $s$ não é, logo são concorrentes.

$$t = 3 \Rightarrow \begin{cases} r : 5x + 4y - 1 = 0 \\ s : -x + 1 = 0 \end{cases}$$

É claro que a reta $s$ é vertical e a reta $r$ não é, logo são concorrentes.
Se $t \neq -2$ e $t \neq 3$, os coeficientes são não nulos e

$$r = s \Leftrightarrow \frac{t + 2}{-1} = \frac{4}{t - 3} = \frac{-1}{1} \Leftrightarrow t = -1.$$

Logo, $r$ e $s$ são coincidentes apenas quando $t = -1$.

**7.**

a) Para que tenham um único ponto em comum devem ser retas concorrentes, logo devemos ter

$$\frac{m}{2} \neq \frac{4}{1} \Leftrightarrow m \neq 8.$$

Assim, $r$ e $s$ têm um único ponto em comum para todo valor de $m$ diferente de 8.

b) Para que não tenham pontos em comum devem ser retas paralelas.
Se $m = 0$

$$\begin{cases} r : 2x + y = 0 \\ s : 4y = 2 \end{cases} \Rightarrow r \times s,$$

uma vez que é claro que $s$ é horizontal e $r$ não é.
Para $m \neq 0$,

$$r//s \Leftrightarrow \frac{m}{2} = \frac{4}{1} \neq \frac{2}{-3m} \Leftrightarrow m = 8 \text{ e } m \neq -1/6 \Leftrightarrow m = 8.$$

Assim, $r$ e $s$ não têm pontos em comum para $m = 8$.

**8.**

- Vamos analisar os pontos $m = 2$, $m = 0$ e $m = -1/2$, onde os coeficientes podem se anular, separadamente.

$$m = 2 \Rightarrow \begin{cases} r : -8y - 1 = 0 \\ s : 6x + 5y + 1 = 0 \end{cases}$$

É claro que a reta $r$ é horizontal e a reta $s$ não é, logo irão se cruzar.

$$m = 0 \Rightarrow \begin{cases} r : -2x - 1 = 0 \\ s : y + 1 = 0 \end{cases}$$

É claro que a reta $r$ é vertical e a reta $s$ horizontal, logo irão se cruzar.

$$m = -1/2 \Rightarrow \begin{cases} r : -5/2.x + 2y - 1 = 0 \\ s : -3/2.x + 1 = 0 \end{cases}$$

É claro que a reta $s$ é vertical e a reta $r$ não é, logo irão se cruzar.

- Suponha agora $m \neq 2, 0$ e $-1/2$. Vamos analisar as razões entre os coeficientes não nulos das equações.

$$\frac{m-2}{3m} = \frac{-4m}{2m+1} \Rightarrow 14m^2 - 3m - 2 = 0$$
$$\Rightarrow m = 1/2 \quad ou \quad m = -2/7$$

Se $m = 1/2$,

$$\frac{m-2}{3m} = \frac{-4m}{2m+1} = -1 \Rightarrow r = s.$$

Se $m = -2/7$,

$$\frac{m-2}{3m} = \frac{-4m}{2m+1} = 8/3 \neq -1 \Rightarrow r//s.$$

Em resumo,

$$\begin{cases} r = s, \text{ se } m = 1/2 \\ r//s, \text{ se } m = -2/7 \\ r \times s, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

**9.** Note que se $m = 0$ a reta $r$ não está definida. Considere $m \neq 0$. Vamos analisar as razões entre os coeficientes não nulos das equações:

$$\frac{7m}{14} = \frac{-m}{-2m} \Leftrightarrow \frac{m}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = 1.$$

Se $m \neq 0, 1$, então $r$ e $s$ são concorrentes.
Se $m = 1$,

$$\frac{7m}{14} = \frac{-m}{-2m} = \frac{1}{2} \neq \frac{-2}{-m} = 2 \Rightarrow r//s.$$

Em resumo, se $m = 0$ a reta $r$ não está definida e, para valores não nulos de $m$,

$$\begin{cases} r//s, \text{ se } m = 1 \\ r \times s, \text{ se } m \neq 1. \end{cases}$$

**10.** Temos

$$r//x = 0 \text{ e } P(2,5) \in r \Rightarrow r : x = 2.$$

As interseções duas a duas entre as retas $r$, $s$ e $t$ determinam os vértices do triângulo. Digamos

$$A \in r \cap s \Rightarrow \begin{cases} x_A = 2 \\ x_A - y_A + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A = (2,3)$$
$$B \in s \cap t \Rightarrow \begin{cases} x_B - y_B + 1 = 0 \\ t : x_B + y_B - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow B = (3,4)$$
$$C \in t \cap r \Rightarrow \begin{cases} t : x_C + y_C - 7 = 0 \\ x_C = 2 \end{cases} \Rightarrow C = (2,5)$$

O perímetro $P$ do triângulo é dado por

$$\begin{aligned} P =& d(A,B) + d(B,C) + d(C,A) \\ =& \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} + \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} \\ &+ \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \\ =& 2 + 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

**11.** É claro que podemos encontrar o coefiente angular da reta $r$ e procurar pela reta de mesmo coeficiente angular que passa pelo ponto dado. Vejamos outra solução.

A equação de um feixe de retas paralelas entre si, contendo a reta $r$ é

$$3x + y + c = 0, c \in \mathbb{R}.$$

De fato, dadas duas retas $r_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $r_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$, com os coeficientes de $x$ e $y$ não nulos, a igualdade

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = k$$

é satisfeita trivialmente se $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$. Quando os coeficientes de $x$ e $y$ são diferentes, podemos reescrever uma equação com os mesmos coeficientes da outra. Vejamos:

$$\begin{aligned} r_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0 &\Leftrightarrow r_2 : kb_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow r_2 : \frac{a_1}{b_1}b_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow r_2 : a_1x + b_1y + \frac{b_1}{b_2}c_2 = 0. \end{aligned}$$

a) Se a reta $r : 3x + y + c = 0$ passa pela origem, então $(0,0)$ deve satisfazer a equação $3x + y + c = 0$ para algum $c \in \mathbb{R}$:

$$3.0 + 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0.$$

Logo, a reta paralela a $r$ passando por $(0,0)$ é $3x + y = 0$.

b) Se a reta $r : 3x + y + c = 0$ passa por $P$, então $(1,-1)$ deve satisfazer a equação $3x + y + c = 0$ para algum $c \in \mathbb{R}$:

$$3.1 + (-1) + c = 0 \Rightarrow c = -2.$$

Logo, a reta paralela a $r$ passando por $P(1,-1)$ é $3x + y - 2 = 0$.

**12.** Reescrevendo a equação do feixe de retas:

$$(k_1 + 10k_2)x + (2k_1 - 4k_2)y - 4k_1 + k_2 = 0.$$

As retas paralelas a $r$ têm equação

$$3x + 4y + c = 0, c \in \mathbb{R}.$$

Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} k_1 + 10k_2 = 3 \\ 2k_1 - 4k_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow k_1 = 13/6 \text{ e } k_2 = 1/12.$$

Substituindo os valores de $k_1$ e $k_2$ na equação das retas paralelas a $r$ temos

$$c = -4k_1 + k_2 = -103/12 \Rightarrow t : 3x + 4y - 103/12 = 0.$$

**13.** Vimos no Exercício 4 como achar o ponto de interseção de um feixe de retas. Note que se $P$ e $Q$ são os pontos de interseção dos feixes (1) e (2) respectivamente, então a reta que passa por $P$ e por $Q$ tem interseção com os dois feixes.

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow P(x, y) = P(0, 1)$$

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ 3x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow Q(x, y) = Q(-1/4, 7/4)$$

A reta que passa por $P$ e $Q$ é dada por $3x + y - 1 = 0$.

**14.** É claro que podemos encontrar o ponto de interseção das retas $r$ e $s$ e procurar pela reta de mesmo coeficiente angular que $u$ que passa por esse ponto. Vejamos outra solução.

- As retas $r$ e $s$ concorrem num ponto, o qual denotamos $P$. Note que o conjunto de retas

  $$k_1(y - 1) + k_2(x - 2y + 5) = 0, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

  também contém o ponto $P$, logo, para qualquer valor de $k_1$ e $k_2$ escolhido, diferentes de $(k_1, k_2) = (1, 0)$ ou $(0, 1)$ (esses valores nos dão as retas $r$ e $s$), a reta correspondente concorre com $r$ e $s$.

- Basta encontrar qual das retas do conjunto é paralela a reta $u$. Temos que

  $$t // u \Rightarrow t : 5x + y + c = 0, \text{ para algum c.}$$

  Reescrevendo o feixe de retas como

  $$k_2 x + (k_1 - 2k_2)y - k_1 + 5k_2 = 0,$$

  temos
  $$\begin{cases} k2 = 5 \\ k_1 - 2k_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow k_1 = 11 \text{ e } k_2 = 5.$$

  Substituindo os valores de $k_1$ e $k_2$ em $c = -k_1 + 5k_2$, temos a equação da reta $t$ procurada:

  $$5x + y + 14 = 0$$

**15.**

- O vértice $B$ pertence à interseção das retas $r$ e $s$.

  $$\begin{cases} 2x - 3y + 12 = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow B(x, y) = B(-3, 2)$$

- A reta $r$ é perpendicular à reta que contém o segmento $AC$, denotada $r_{AC}$. Como o coeficiente angular de $r$ é $2/3$, o coeficiente angular de $r_{AC}$ é $-3/2$. Além disso, $r_{AC}$ contém o ponto $C$. Isso implica

  $$r_{AC} : y = \frac{-3x}{2} + 5.$$

- O ponto $M$, onde a mediana atinge o segmento $AC$, pertence à interseção das retas $s$ e $r_{AC}$.

  $$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ y = \dfrac{-3x}{2} + 5 \end{cases} \Rightarrow M(x, y) = M(6, -4)$$

- Como $M$ é o ponto médio do segmento $AC$,

  $$\frac{x_C + x_A}{2} = x_M \text{ e } \frac{y_C + y_A}{2} = y_M.$$

  Substituindo os valores que já foram obtidos, encontramos $x_A = 8$ e $y_A = -7$. Assim, o vértice $A$ é o ponto $A(8, -7)$.

**16.**

- O vértice $C$ pertence à interseção das retas $r$ e $s$.

  $$\begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ 2x = y + 2 \end{cases} \Rightarrow C(x, y) = C(-1, -4)$$

- O vértice $A$ pertence à interseção da reta $r$ com o eixo das abscissas.

  $$\begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(x, y) = A(-5, 0)$$

- O vértice $B(x_B, y_B)$ pertence à reta $s : 2x = y + 2$, logo

  $$2x_B = y_B + 2 \Leftrightarrow y_B = 2x_B - 2$$

- A soma é dada por

  $$\begin{aligned} S =& d(A, B)^2 + d(B, C)^2 + d(C, A)^2 \\ =& (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 \\ & + d(C, A)^2 \\ =& (x_B + 5)^2 + (2x_B - 2)^2 + (x_B + 1)^2 + (2x_B + 2)^2 \\ & + d(C, A)^2 \\ =& 10x_B^2 + 12x_B + 34 + d(C, A)^2. \end{aligned}$$

  A soma $S$ pode ser vista como uma função do segundo grau na variável $x_B$ e seu gráfico é uma parábola com concavidade voltada para cima. Logo, para achar seu mínimo basta encontrar o valor da abscissa do vértice da parábola. Assim,

$$x_B = \frac{-12}{2.10} = \frac{-3}{5}.$$

O valor de $y_B$ é

$$y_B = 2x_B - 2 = 2\left(\frac{-3}{5}\right) - 2 = \frac{-16}{5}.$$

O vértice $B$ do triângulo é o ponto $(-3/5, -16/5)$.

**17.**

- A reta $r$ é paralela à segunda bissetriz ($y = -x$) e contém o ponto $C$, logo

$$\begin{cases} r : y + x + k = 0, \text{ para algum } k \\ (-5, -4) \in r \end{cases} \Rightarrow k = 9,$$

logo $r : y + x + 9 = 0$.

- Como $AC \subset r$ e $AB \subset$ eixo $x$, o vértice $A$ pertence à interseção de $r$ com o eixo x:

$$\begin{cases} r : y + x + 9 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A = (-9, 0).$$

- Como o triângulo é retângulo e sua hipotenusa é o lado $AC$, o ângulo entre $AC$ e $AB$ deve ser reto. Assim, a reta $s$ que contém o lado $BC$ deve ser perpendicular ao eixo x (que contém $AB$) e conter o vértice $C$.

$$\begin{cases} s : x = k, \text{ para algum k} \\ (-5, -4) \in s \end{cases} \Rightarrow k = -5,$$

logo $s : x = -5$.

- Como $B \in s \cap$ eixo $x$, então $B = (-5, 0)$.

Considerando o segmento $AB$ como a base do triângulo, a área pode ser calculada como

$$A = \frac{|AB|.|BC|}{2} = \frac{d(A, B).d(B, C)}{2} = 8u.a.$$

Material elaborado por Lorena Bulhosa