Exercícios – Módulo Eletrostática III

Potencial Elétrico e Energia Elétrica

Terceiro Ano do Ensino Médio

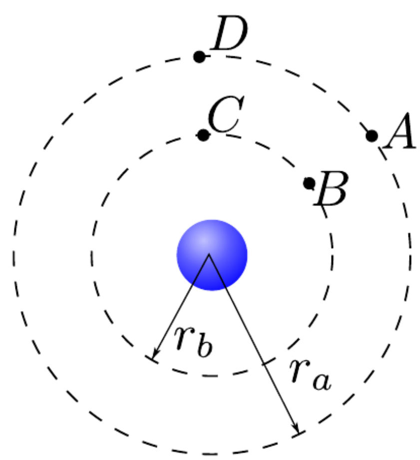
Autor: Vinicius Henning

Revisora: Luna Lima

Portal
da Física
OBMEP

1. Exercícios resolvidos sobre Potencial Elétrico e Energia Elétrica

Exercício 1) Considere uma carga puntiforme $Q = 0,3\mu C$ e os pontos A, B, C e D. Os pontos Ae D estão sobre o mesmo círculo centrado na carga Q de raio $r_a = 9cm$, enquanto os pontos Be C



estão sobre o mesmo círculo de raio $r_b = 3cm$, como ilustrado na figura abaixo.

a) Calcule o valor do potencial elétrico gerado pela carga Q nos pontos A e B.
b) Calcule a diferença de potencial U_{AB} entre os pontos A e B e o trabalho para levar uma carga $q = 1\mu C$ do ponto A até o ponto B. Discuta.
c) Calcule o trabalho para ir do ponto A ao ponto D. Discuta o resultado sobre o conceito de equipotenciais.
d) Calcule o trabalho total para ir do ponto A ao ponto B pelo caminho $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B$. Discuta o resultado.

Solução:
a) Sabemos que o potencial gerado num ponto A que dista r_a da carga é dado por
$V_A = \frac{k_o q}{r_a}$. Substituindo os valores, obtemos

$$V_A = \frac{(9.10^9)(0,3.10^{-6})}{0,09} = 3.10^4 V = 30kV$$

De maneira similar, encontramos que o valor do potencial no ponto B é $V_B = 90kV$. É bom utilizarmos as fórmulas para nos familiarizarmos com elas. Todavia, nós sabemos que o potencial é linear e inversamente proporcional à distância. Como $r_b = \frac{r_a}{3}$, concluímos que $V_B = 3V_A$.

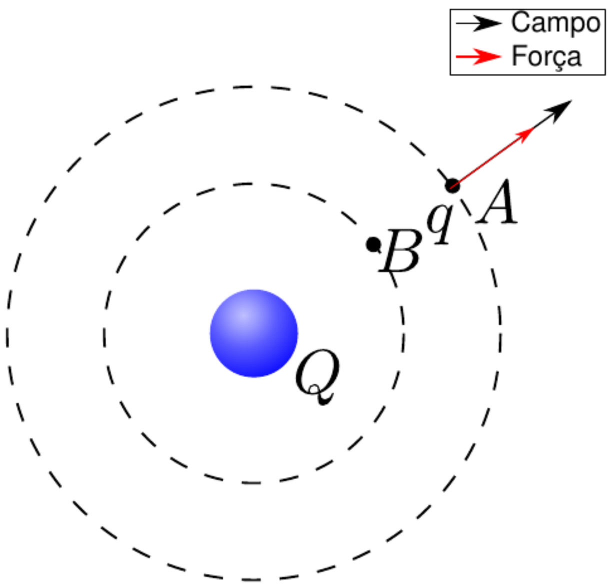
b) A diferença de potencial entre dois pontos é simplesmente dada por $U_{AB} = V_A - V_B$. Assim, temos

$$U_{AB} = 30kV - 90kV = - 60kV$$

O trabalho realizado para levar uma carga do ponto A ao ponto B é dado pela carga multiplicada pela diferença de potencial entre esses dois pontos, isto é $\tau_{AB} = qU_{AB}$. Logo, substituindo os valores, obtemos

$$\tau_{AB} = \left(1.10^{-6}\right).\left(- 60.10^{3}\right) = - 60.10^{-3}J = - 60mJ$$

Como o trabalho é negativo, significa que a força elétrica opõe-se ao deslocamento de A para B. É mais fácil visualizarmos esse problema se pensarmos no campo elétrico gerado por Q no ponto A e no sinal da carga q. Analisemos a figura abaixo



O vetor em preto representa o campo gerado pela carga Q no ponto A. Como a carga q é positiva, a força aponta no mesmo sentido do campo e obtemos a interpretação que esperávamos: cargas de mesmo sinal repelem-se. Isso significa que a força elétrica gerada pelo campo de Q no ponto A tende a empurrar a carguinha q para longe do ponto A e, consequentemente, do ponto B. Assim, concluímos que o trabalho negativo é o esperado, pois precisamos levar a carga puntiforme q no sentido contrário ao da força exercida pela presença da carga Q.

c) Como nós já calculamos o potencial no ponto A, só nos resta calcular o potencial no ponto D. Sendo a distância da carga Q ao ponto D dado por r_d, nós temos $V_D = \frac{k_0 Q}{r_d}$. Todavia, como o ponto D encontra-se no círculo de raio r_a, isso implica que $r_d = r_a$ e obtemos

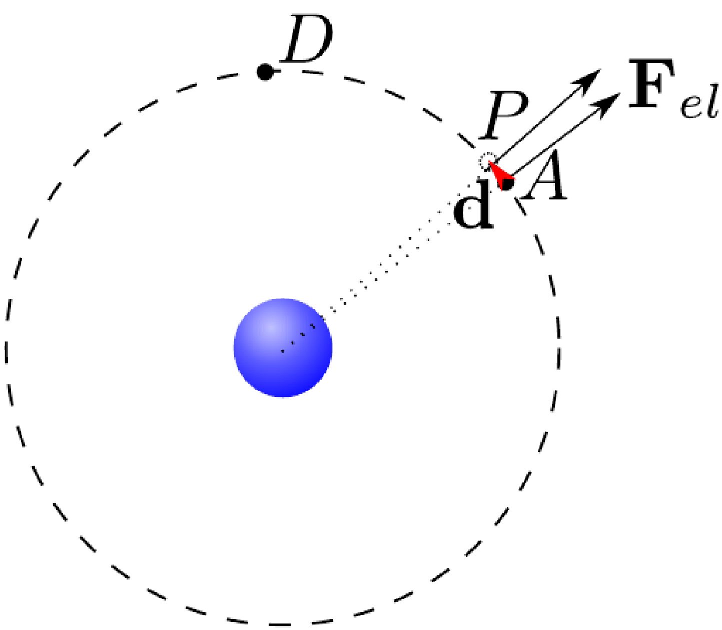
$$V_D = \frac{k_0 Q}{r_d} = V_A = 30kV$$

O trabalho para levar a carga q de A para D é dado por

$$\tau_{AD} = qU_{AD} = q\left(V_A - V_D\right) = 0.$$

Isto é, não realizamos trabalho para mover a carga de A para D. Isso ocorre pelo fato de A e D estarem sob a mesma equipotencial. Se levássemos essa informação em consideração desde o começo, poderíamos inferir de maneira imediata que o trabalho seria nulo, visto que não há diferença de potencial entre os dois pontos. Podemos interpretar esse resultado analisando a força ponto-a-ponto na circunferência de raio r_a , e analisando o vetor deslocamento em cada ponto. Esta é uma discussão um pouco mais sofisticada, mas podemos fazê-la.

Para ilustrarmos isso, vamos considerar o ponto P no desenho abaixo também sobre o círculo de raio r_a. O vetor que vai de A para P é o vetor $d = \underline{PA}$, representado em vermelho.



Note que o ponto P está tão perto do ponto A, que o vetor força elétrica em q nos pontos Ae P são aproximadamente os mesmos. Assim, nós podemos aproximar a força como sendo aproximadamente constante ao longo do caminho descrito pelo vetor deslocamento $d = \underline{PA}$. Logo, nós podemos calcular o trabalho usando a fórmula para o trabalho de uma força constante $\tau = F_{el} \cdot d$, e nós observamos que o trabalho é nulo, visto que a força é perpendicular ao deslocamento. Para esse tipo de argumento, nós dizemos que os pontos A e P são *infinitesimalmente próximos*. É por isso que o trabalho ao longo de uma superfície equipotencial (qualquer que seja tal superfície) é nulo, pois o campo elétrico é sempre perpendicular às superfícies equipotenciais, e assim também é a força (que será sempre perpendicular ao deslocamento infinitesimal de uma carga ao longo da superfície).

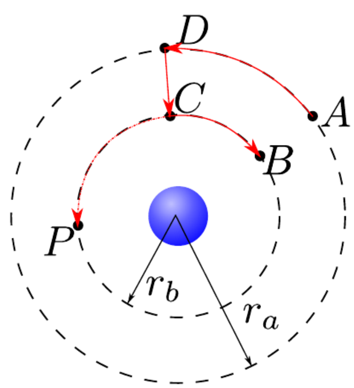
d) Para calcularmos o trabalho total ao longo do percurso $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B$, precisamos calcular os trabalhos $\tau_{total} = \tau_{AD} + \tau_{DC} + \tau_{CB}$. O trabalho τ_{AD} já foi calculado, e obtivemos um trabalho nulo, pois deslocamos a carga ao longo de uma superfície equipotencial. O trabalho τ_{CB} é similar neste sentido, pois também se trata de um caminho ao longo de uma superfície equipotencial; logo o trabalho $\tau_{CB} = 0$. Assim, o trabalho faltante é o trabalho ao longo do caminho $\underline{CD}$. Para calcularmos τ_{DC} precisamos calcular a diferença de potencial entre os pontos Ce D.

$$U_{DC} = V_D - V_C =$$
$$= \frac{k_0 q}{r_a} - \frac{k_{0q}}{r_b} = -\ 60kV \equiv U_{AB}$$

Assim, nós concluímos que o trabalho

$$\tau_{total} = \tau_{DC} = qU_{DC} =-\ 60mJ$$

Esta pergunta poderia ser mais facilmente respondida se lembrássemos que: *o trabalho da força elétrica entre dois pontos é independente do caminho escolhido*. Assim, não importa como vamos de A para B, só importa a diferença de potencial entre os dois pontos. Além disso, poderíamos ter escolhido qualquer ponto na superfície equipotencial de valor V_B, que o trabalho seria o mesmo. Assim, por exemplo, nós poderíamos ter tomado o caminho $\underline{AD} + \underline{DC} + \underline{CP}$, na figura abaixo, que o trabalho total seria o mesmo, $\tau_{total} = \tau_{AD} + \tau_{DC} + \tau_{CP}$.



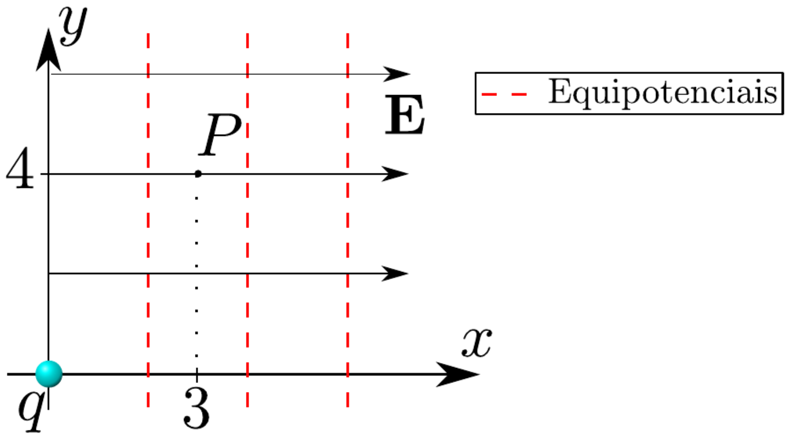
Exercício 2) Considere uma carga puntiforme $q = 4\mu C$ na origem do sistema de coordenadas. Esta carga está na presença de um campo elétrico uniforme $E = 50\frac{V}{m}$ na direção horizontal e com sentido da esquerda para a direita.

a) Desenhe a situação descrita acima e as superfícies de potencial constante.

b) Considere o ponto P de coordenadas $x = 3cm$ e $y = 4cm$. Calcule o trabalho realizado pela força elétrica para ir da origem até o ponto P.

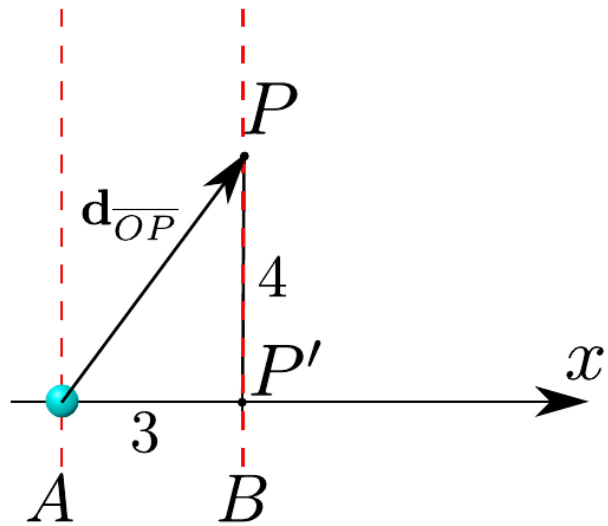
Solução:

a) Desenhar o problema e escrever as informações que temos em mãos é sempre de extrema importância para resolvermos um exercício. Abaixo, nós temos o campo elétrico ao longo da direção positiva de x com as equipotenciais **perpendiculares** às linhas de campo. O ponto $P = (3, 4)$ também é representado na figura.



b) Para este problema, nós podemos calcular o trabalho de duas maneiras: **(i)** nós podemos calcular, a partir do campo, a diferença de potencial entre os dois pontos (a origem O e o ponto P) e assim obter o trabalho realizado pela força elétrica agindo sobre a carga q como $\tau_{OP} = qU_{OP}$. **(ii)** Além disso, nós estamos na presença de um campo uniforme (que, por consequência, produz uma força constante atuando sobre a carga q, F_{el}). Logo, nós podemos calcular pela fórmula do trabalho de uma força constante, $\tau_{OP} = F_{el} \cdot d_{OP}$, onde d_{OP} é o vetor deslocamento que sai da origem O e chega no ponto P.

Pelo método **(i)**, nós precisamos primeiramente achar a diferença de potencial entre os pontos O e o ponto P. Essa questão tem um caráter mais sutil pelo fato de a distância a ser considerada não ser d_{OP}. Vamos analisar o desenho abaixo.



Aqui nós desenhamos as equipotenciais A e B, que passam pela origem O e pelo ponto P, respectivamente. Note que o ponto P' estará sob o mesmo potencial que o ponto P. Assim, a diferença de potencial $U_{OP} = U_{OP'}$. Logo, fica evidente que a distância não pode ser $d_{\underline{OP}}$, e sim a distância entre as duas equipotenciais que é $3cm$. Isso reforça **que precisamos considerar a distância d entre as superfícies equipotenciais**.

Logo, como o campo possui módulo $E = 50\frac{V}{m}$, nós convertemos a distância de centímetro para metro e utilizamos a fórmula:

$$d = 3cm = 0,03m = 3.10^{-2}m$$

$$U_{AP} = U_{AP'} = E.d = \left(50\frac{V}{m}\right).\left(3.10^{-2}m\right) = 1,5V$$

Para obtermos o trabalho realizado pela força F_{el} sobre a carga q, precisamos apenas multiplicar pela diferença de potencial obtida acima

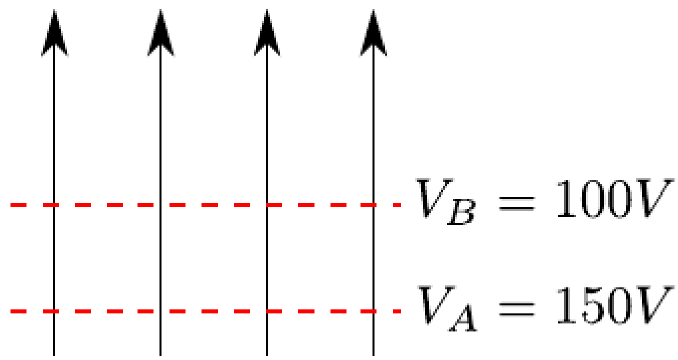
$$\tau_{\underline{OP}} = \tau_{\underline{OP'}} = \left(4.10^{-6}C\right).(1,5V) = 6.10^{-6}J = 6\ \mu J.$$

Pela discussão acima é fácil vermos como seria pelo método **(ii)**. Nós podemos simplesmente calcular o trabalho para ir de O para P', e depois de P' para P (que é nulo). Isso também está relacionado com o fato de o trabalho da força elétrica ser independente do caminho, pois o campo eletrostático é um *campo conservativo*.

Exercício 3) Considere um campo elétrico uniforme ao longo da direção vertical com sentido de baixo para cima. Na figura abaixo nós marcamos em vermelho as linhas equipotenciais $V_A = 150V$ e $V_B = 100V$. Assumindo que a distância entre as duas equipotenciais é $d = 2cm$, calcule:

a) O campo elétrico que gera essas superfícies equipotenciais.

b) Calcule o trabalho realizado pelo campo elétrico sobre uma carga puntiforme $q = 2\mu C$. O sinal do trabalho é o esperado?
c) Assumindo que a carguinha estava em repouso quando se encontrava na equipotencial V_A e possui massa $m = 0,1g$, calcule a velocidade da partícula carregada quando está sobre a equipotencial V_B.



Solução:
a) Nós sabemos que a diferença de potencial entre dois pontos Ae B para o problema do campo uniforme está relacionada com o campo elétrico da seguinte maneira:
$U_{AB} = V_A - V_B = E.d$,
onde d é a distância entre as duas superfícies de potenciais V_Ae V_B. Substituindo os valores pertinentes, obtemos

$$E = \frac{V_A - V_B}{d} = \frac{(150-100)V}{0{,}02m} = 2,5\frac{kV}{m}$$

b) Para calcular o trabalho realizado pelo campo elétrico sobre uma partícula de carga q, nós precisamos somente do valor da carga e do valor do potencial nos dois pontos de interesse:
$\tau_{AB} = qU_{AB}$.
Como nós já calculamos a diferença de potencial, $U_{AB} = 50V$, nós só precisamos multiplicar pela carga

$$\tau_{AB} = (2\mu C).(50V) = 2.10^{-6}.50J = 0,1mJ$$

Nós sabemos que as cargas positivas sofrem força no sentido positivo das linhas de campo, enquanto as cargas negativas sofrem força no sentido contrário ao das linhas de campo. Isto é, ao colocarmos uma partícula positivamente carregada na equipotencial V_A em repouso e permitindo que ela se mova, ela iria naturalmente em direção ao potencial V_B. Se colocarmos uma partícula negativamente carregada no potencial V_B em repouso, ela naturalmente iria para o potencial V_A. Assim, como estamos indo de um potencial maior para um potencial menor, o trabalho é positivo. Se tivéssemos que mover a partícula positivamente carregada contra as linhas de campo, isto é, de V_B para V_A, teríamos que vencer uma barreira de potencial e, consequentemente, o trabalho seria negativo.

c) De maneira análoga ao que fazemos na mecânica, a velocidade na equipotencial V_B pode ser facilmente encontrada utilizando o teorema trabalho energia cinética. Como já calculamos o trabalho para ir da equipotencial V_A para a equipotencial V_B , e sabemos que a velocidade inicial da partícula (em V_A) é zero, nós podemos utilizar $\tau_{AB} = T_B - T_A$, onde T_A é a energia cinética no ponto A, e T_B a energia cinética no ponto B. Todavia, nós também podemos utilizar a cinemática para calcular. Nós sabemos que o módulo da força elétrica é dado por $F = qE$. Das leis de Newton nós sabemos que a força $F = ma$, onde a é a aceleração da partícula. Assim, combinando essas duas equações nós obtemos a aceleração da partícula de massa m e carga q.

$$a = \frac{qE}{m} = \left(2.10^{-6}C\right).\frac{\left(2{,}5.10^{3}\frac{V}{m}\right)}{(0{,}1g)} = 50\frac{m}{s^2}$$

Note que $\frac{V}{m}$ é unidade de campo elétrico, C é unidade de carga, e a unidade de força é dada por $[F] = [q].[E]$.

Lembrando as fórmulas da cinemática, temos:

$$S_f = S_0 + v_0 t + a\frac{t^2}{2}$$
$$V_f = V_0 + at$$

onde V_0 e V_f correspondem à velocidade inicial e final, respectivamente, assim como S_f e S_0 correspondem à posição final e inicial. Como a velocidade inicial é zero e $S_f - S_0 = 2cm$, as equações simplificam

$$S_f - S_0 = a\frac{t^2}{2}$$
$$V_f = at$$

e obtemos

$$t = \pm\sqrt{2\frac{\left(S_f - S_0\right)}{a}}$$

Como estamos analisando o que acontece após a partícula estar em repouso, só consideramos a raiz positiva. Substituindo na equação para a velocidade final, obtemos

$$V_f = a\sqrt{2\frac{\left(S_f - S_0\right)}{a}}$$
$$\sqrt{2a\left(S_f - S_0\right)}$$

Antes de substituirmos os valores, note que $a\left(S_f - S_0\right)$ possui dimensão de distância ao quadrado por tempo ao quadrado. Isto é, dimensão de velocidade ao quadrado. Ao tomarmos a raiz quadrada obtemos a unidade correta!

$$V_f = \sqrt{2.\left(50\frac{m}{s^2}\right).(2cm)}$$

$$= \sqrt{2.\left(50\frac{m}{s^2}\right).\left(2.10^{-2}m\right)}$$

$$= \sqrt{2}\frac{m}{s} \simeq 1,7\frac{m}{s}$$