Módulo Geometria Espacial II - volumes e áreas de prismas e pirâmides

Pirâmide.

3° **ano/E.M.**

Portal da Matemática
OBMEP

Pirâmide.
Geometria Espacial II - volumes e áreas de prismas e pirâmides.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine o volume de uma pirâmide cuja área da base é $12cm^2$ e a altura mede $10cm$.

Exercício 2. Determine a medida da aresta lateral de uma pirâmide hexagonal regular, sabendo que a aresta da base mede $3cm$ e a altura mede $4cm$.

Exercício 3. Qual a medida da altura de uma pirâmide quadrangular regular cuja aresta da base mede $8cm$ e o volume é $256cm^3$?

Exercício 4. Qual a altura de um tetraedro regular de $12cm$ de aresta?

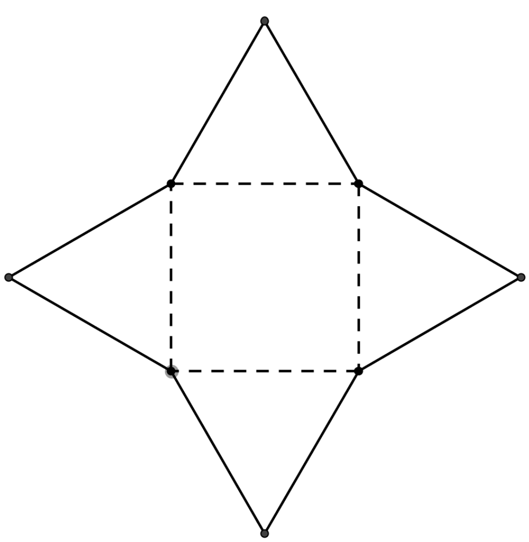
Exercício 5. Determine a medida da aresta de um tetraedro regular, sabendo que seu volume mede $18\sqrt{2}cm^3$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. Determine a área total de uma pirâmide triangular regular cujo apótema mede $10cm$ e o apótema da base mede $3cm$.

Exercício 7. Determine o volume de uma pirâmide construída com 8 palitos medindo $30cm$ cada.

Exercício 8. A figura abaixo mostra uma pirâmide regular, com todas as arestas congruentes, planificada. Se sua área total é $(36+36\sqrt{3})cm^2$, determine seu volume após sua montagem.

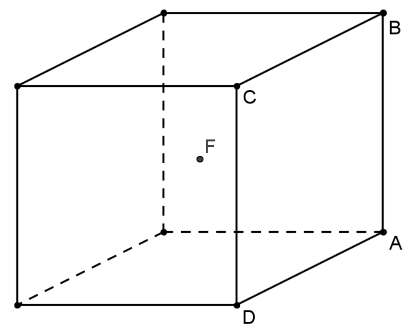


Exercício 9. Determine o volume de octaedro regular de $6cm$ de aresta.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 10. Em um cubo de aresta medindo a, marcam-se os pontos médios de três arestas que concorrem a um mesmo vértice. O plano α que contém estes 3 pontos, divide o cubo em dois sólidos, dos quais uma pirâmide. Determine o volume desta pirâmide.

Exercício 11. Na figura, F é o centro do cubo.



Se o volume do cubo é 1, o volume da pirâmide de base $ABCD$ e vértice F é:

a) $\frac{1}{2}$.

b) $\frac{1}{3}$.

c) $\frac{1}{4}$.

d) $\frac{1}{6}$.

e) $\frac{1}{8}$.

Exercício 12. Três das arestas de um cubo, com um vértice em comum, são também arestas de um tetraedro. A razão entre o volume do tetraedro e o volume do cubo é:

a) $\frac{1}{8}$.

b) $\frac{1}{6}$.

c) $\frac{2}{9}$.

d) $\frac{1}{4}$.

e) $\frac{1}{3}$.

Exercício 13. Na figura abaixo, $ABCD$ é um tetraedo regular de lado a. Sejam E e F os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente. Então, o valor de EF é:

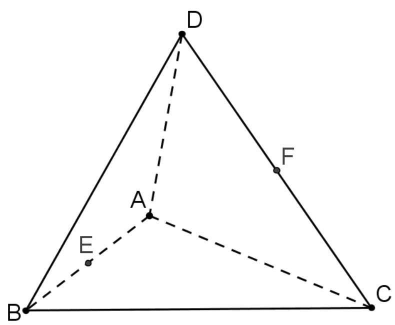
a) $\dfrac{a}{2}$.

b) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

c) $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

d) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

e) $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.



Exercício 14. A razão entre a área da base de uma pirâmide regular de base quadrada e a área de uma das faces é 2. Sabendo que o volume da pirâmide é de $12m^3$, temos que a altura da pirâmide mede (em metros):

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

Exercício 15. Dada uma pirâmide regular triangular, sabe-se que sua altura mede $3acm$, sendo a a medida da aresta de sua base. Então, a área total dessa pirâmide, em centímetros quadrados, vale:

a) $\dfrac{a^2\sqrt{327}}{4}$.

b) $\dfrac{a^2\sqrt{109}}{2}$.

c) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

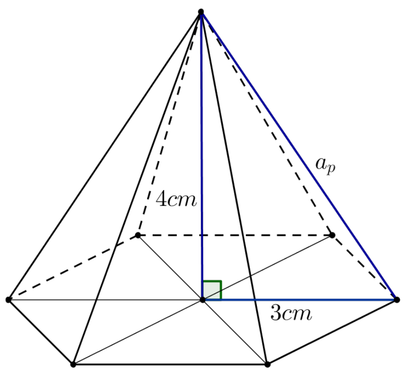
d) $\dfrac{a^2\sqrt{3}(1+\sqrt{109})}{2}$.

e) $\dfrac{a^2\sqrt{3}(1+\sqrt{109})}{4}$.

Respostas e Soluções.

1. $V = \dfrac{12 \cdot 10}{3} = 40cm^3$

2. No hexágono regular a medida do lado é igual à medida do raio da circunferência circunscrita a ele. Agora, perceba, pela figura, que a aresta da pirâmide, o raio da circunferência circunscrita e a altura formam um triângulo retângulo, ou seja, $a_p^2 = 3^2 + 4^2$, segue que a aresta da pirâmide mede $5cm$.



3.

$$\begin{aligned} V &= \frac{A_b \cdot h}{3} \\ 256 &= \frac{8^2 \cdot h}{3} \\ h &= 12. \end{aligned}$$

Temos então que a altura da pirâmide mede $12cm$.

4. O raio da circunferência circunscrita à base mede $R = \dfrac{2h}{3}$, sendo h a altura do triângulo da base, ou seja, $R = \dfrac{2l\sqrt{3}}{3 \cdot 2} = \dfrac{24\sqrt{3}}{6} = 4\sqrt{3}cm$. Esse raio, a altura H da pirâmide e a aresta a_p da pirâmide formam um triângulo retângulo. Temos então:

$$\begin{aligned} 12^2 &= H^2 + (4\sqrt{3})^2 \\ H^2 &= 144 - 48 \\ H^2 &= 96. \end{aligned}$$

Segue que a altura mede $4\sqrt{6}cm$.

5. Verificamos no exercício anterior que a altura H do tetraedro é $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, sendo a a medida da aresta do tetraedro. Temos então:

$$\begin{aligned} V &= \frac{A_b \cdot H}{3} \\ 18\sqrt{2} &= \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{3} \\ 18\sqrt{2} &= \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \\ a^3 &= 6^3 \\ a &= 6. \end{aligned}$$

Portanto a medida da aresta do tetraedro é $6cm$.

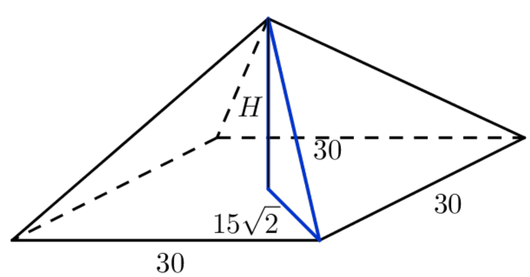
6. Se o apótema da base, que é um triângulo equilátero, mede $3cm$, então a altura desse triângulo mede $9cm$, pois o apótema no triângulo é a terça parte da altura. Dessa forma, o lado do triângulo, que é a aresta da base, mede $\dfrac{9 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}cm$. Temos então que a área lateral é $3 \cdot \dfrac{6\sqrt{3} \cdot 10}{2} = 90\sqrt{3}cm^2$, segue que a área total é $90\sqrt{3} + 27\sqrt{3} = 117\sqrt{3}cm^2$.

7. Como são oito palitos, a pirâmide deve ser quadrangular e regular, já que os palitos têm o mesmo tamanho. A área da base é $30^2 = 900cm^2$. Para o cálculo da altura, precisaremos observar o triângulo retângulo formado pelo raio da circunferência circunscrita ao triângulo da base, R, pela aresta lateral a_p e pela altura H. Temos então:

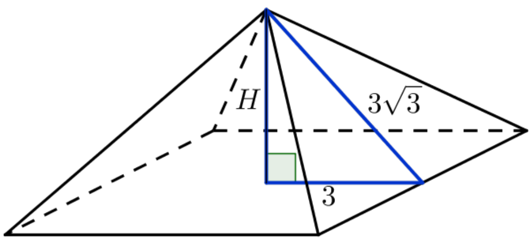
$$\begin{aligned} H^2 + R^2 &= a_p^2 \\ H^2 + \left(\frac{30\sqrt{2}}{2}\right)^2 &= 30^2 \\ H^2 &= 900 - 450 \\ H &= \sqrt{450} \\ H &= 15\sqrt{2}cm. \end{aligned}$$

Temos então que o volume é:

$$\begin{aligned} V &= \frac{900 \cdot 15\sqrt{2}}{3} \\ V &= 4500\sqrt{2}cm^3. \end{aligned}$$

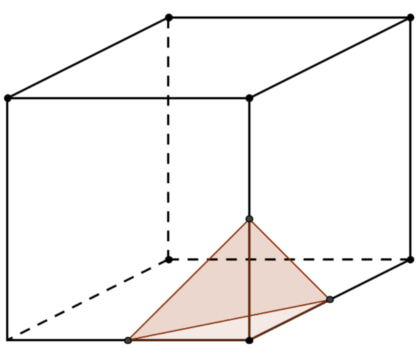


8. Como todas as arestas são congruentes, de medida a, temos que a área total é $a^2 + 4 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 36 + 36\sqrt{3}$, ou seja, $a = 6cm$. O triângulo formado pelo apótema da pirâmide, $\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}cm$, pelo apótema da base, $\dfrac{a}{2} = 3cm$, e a altura H, é retângulo. Temos então $H^2 + 3^2 = (3\sqrt{3})^2$, segue que $H = 3\sqrt{2}cm$. Calculando o volume encontramos $V = \dfrac{36 \cdot 3\sqrt{2}}{3} = 36\sqrt{2}cm^3$.

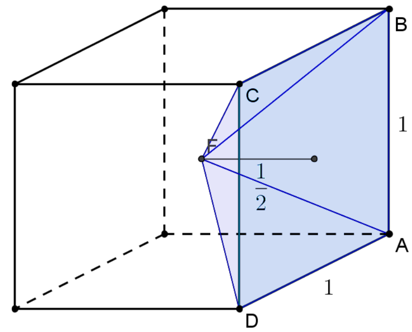


9. Podemos decompor o octaedro regular em duas pirâmides quadrangulares regulares. Vimos no exercício anterior que podemos calcular a altura de uma pirâmide quadrangular regular usando os apótemas da base e da pirâmide, ou seja, $H = 3\sqrt{2}cm$. Temos então que o volume do octaedro é $2\dfrac{6^2 \cdot 3\sqrt{2}}{3} = 72\sqrt{2}cm^3$.

10. Três das arestas desta pirâmide medem a metade do lado do cubo, ou seja, $\dfrac{a}{2}$. Assumindo uma das faces da pirâmide, que não esteja contida no plano α, como base, temos que essa base é um triângulo retângulo de catetos medindo $\dfrac{a}{2}$ e altura também medindo $\dfrac{a}{2}$. Assim, o volume da pirâmide é $V = \dfrac{\dfrac{a^2}{8} \cdot \dfrac{a}{2}}{3} = \dfrac{a^3}{48}$.



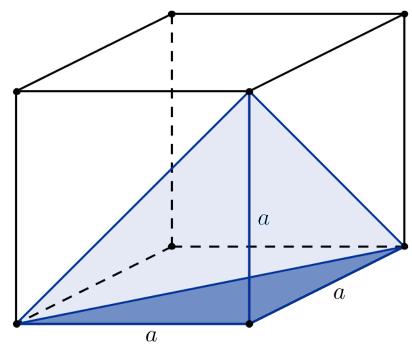
11. (Extraído da UF-RS) Se o volume do cubo é 1, temos $a^3 = 1$, segue que a medida de sua aresta é 1. A pirâmide formada é quadrangular regular, cuja aresta da base mede 1 e altura, $\dfrac{1}{2}$. Temos então que o volume da pirâmide é $V = \dfrac{1^2 \cdot \frac{1}{2}}{3} = \dfrac{1}{6}$.



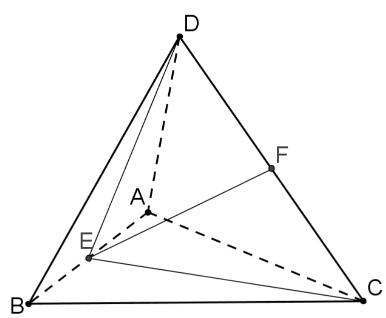
12. (Extraído da FUVEST - 2014) Chamando a medida da aresta do cubo de a, o volume do cubo é a^3. O tetraedro tem um triângulo retângulo na base, cujos catetos medem a e altura também mede a. Assim, seu volume é:

$V = \dfrac{\dfrac{a^2}{2} \cdot a}{3} = \dfrac{a^3}{6}$.

Temos então que a razão entre o volume do tetraedro e o volume do cubo é $\dfrac{1}{6}$. Resposta B.



13. (Extraído da FUVEST) Vamos traçar os segmentos $\overline{EC}$, $\overline{ED}$ e $\overline{EF}$.



Como o tetraedro é regular, então $\overline{ED}$ e $\overline{EC}$ são congruentes, pois são alturas de triângulos equiláteros congruentes, medindo $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Como F é ponto médio de $\overline{CD}$, então $\overline{EF}$ é a altura do triângulo isósceles CDE, ou seja, temos um triângulo retângulo CEF, que, aplicando o teorema de

Pitágoras, obtemos:

$$\begin{aligned} EF^2 + CF^2 &= CE^2 \\ EF^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 &= \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ EF^2 &= \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} \\ EF^2 &= \frac{a\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Resposta B.

14. (Extraído da FUVEST) Chamando a aresta da base de a e o apótema da pirâmide de b, temos $\frac{a^2}{\frac{ab}{2}} = 2$, ou seja, $a = b$. Se o volume da pirâmide é $12m^3$, então $\frac{a^2h}{3} = 12$, sendo h a medida da altura da pirâmide, segue que $h = \frac{36}{a^2}$. Analisando o triângulo retângulo formado pela altura, apótema da base e apótema da pirâmide, temos:

$$\begin{aligned} b^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \\ a^2 &= \frac{a^2}{4} + \frac{36^2}{a^4} \\ \frac{3a^2}{4} &= \frac{36^2}{a^4} \\ 3a^6 &= 4 \cdot 36 \cdot 36 \\ a^6 &= 4^3 \cdot 3^3 \\ a^2 &= 12. \end{aligned}$$

Temos, então, que a altura da pirâmide é $h = \frac{36}{12} = 3$. Resposta C.

15. (Extraído do ITA) Vamos analisar o triângulo retângulo formado pela altura, $3a$, apótema da pirâmide, a_{pp}, e apótema da base, r:

$$\begin{aligned} a_{pp}^2 &= (3a)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 \\ a_{pp}^2 &= 9a^2 + \left(\frac{a^2}{12}\right) \\ a_{pp}^2 &= \frac{109a^2}{12} \\ a_{pp} &= \frac{a\sqrt{109}}{\sqrt{12}}. \end{aligned}$$

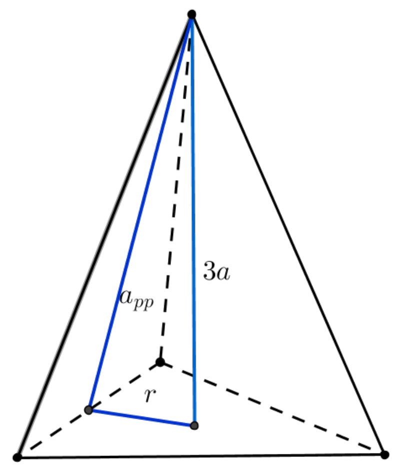
Dessa forma, temos que a área lateral da pirâmide é:

$$\begin{aligned} A_\ell &= 3\frac{a \cdot a\sqrt{109}}{2\sqrt{12}} \\ A_\ell &= \frac{a^2\sqrt{327}}{4}. \end{aligned}$$

Como a área da base é $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, segue que a área total é:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{327}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}(1+\sqrt{109})}{4}$$

Resposta E.



Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com