Cônicas

Elipse

3° ano E.M.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

Cônicas
Elipse

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. O ponto que representa o centro da elipse de equação $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ é:

a) $(-1, -2)$.

b) $(-1, 2)$.

c) $(1, -2)$.

d) $(1, 2)$.

e) $(0, 0)$.

Exercício 2. A distância focal da elipse de equação $\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$ é:

a) 8.

b) 10.

c) 12.

d) 14.

e) 16.

Exercício 3. O conjunto de pontos cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante é uma:

a) circunferência.

b) elipse.

c) hipérbole.

d) parábola.

Exercício 4. Seja $2a$ a medida do eixo maior e $2b$ a medida do eixo menor da elipse $\frac{(x-4)^2}{8} + \frac{(y+5)^2}{32} = 1$, então, $2a + 2b$ é:

a) $8\sqrt{2}$.

b) $10\sqrt{2}$.

c) $12\sqrt{2}$.

d) $14\sqrt{2}$.

e) $15\sqrt{2}$.

Exercício 5. A equação da elipse com centro em $(1, 2)$, eixo focal vertical, eixo maior igual a 6 e eixo menor igual a 4 é:

a) $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$.

b) $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$.

c) $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$.

d) $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$.

e) $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$.

Exercício 6. Determine a equação da elipse cujo centro é $(-2, -3)$, eixo maior mede 12, eixo menor mede 8 e eixo focal horizontal.

Exercício 7. Os pontos $(4, 0)$ e $(-4, 0)$ são vértices de uma elipse cujos focos são $(3, 0)$ e $(-3, 0)$. Determine a equação da elipse.

Exercício 8. A excentricidade da elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$ é:

a) $\frac{1}{5}$.

b) $\frac{2}{5}$.

c) $\frac{3}{5}$.

d) $\frac{4}{5}$.

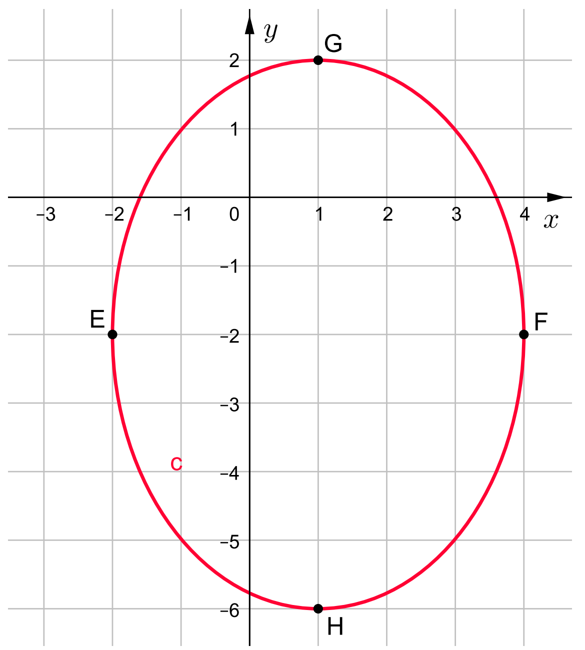
e) 1.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 9. Determine a medida do segmento cujas extremidades são as interseções da reta $r : 2y - x + 2 = 0$ com a elipse $\alpha : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Exercício 10. Determine as coordenadas dos focos da elipse $\alpha : 9x^2 + 4y^2 - 72x - 24y + 144 = 0$.

Exercício 11. Determine a equação da elipse na figura abaixo, sendo E e F as extremidades do eixo menor e G e H as extremidades do eixo maior.



Exercício 12. Verifique se o ponto $P(0,1)$ é interno, externo ou pertence à elipse de equação $\dfrac{(x-7)^2}{9}+\dfrac{(y+5)^2}{25}=1$.

Exercício 13. A equação da circunferência inscrita à elipse $\dfrac{(x+2)^2}{9}+\dfrac{(y-3)^2}{16}=1$ é:

a) $(x-2)^2+(y-3)^2=16$.

b) $(x+2)^2+(y-3)^2=9$.

c) $(x-2)^2+(y+3)^2=9$.

d) $(x+2)^2+(y+3)^2=16$.

e) $(x+2)^2+(y+3)^2=9$.

Exercício 14. Para quantos valores inteiros de m a reta $y=x+m$ é tangente à elipse $\dfrac{(x+2)^2}{9}+\dfrac{(y-3)^2}{16}=1$?

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

Exercício 15. O lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano que, juntamente com os pontos $A(-3,5)$ e $B(3,5)$, determinam triângulos com perímetro $2p=16cm$ é uma:

a) elipse.

b) parábola.

c) hipérbole.

d) circunferência.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 16. A área do polígono que tem como vértices os extremos dos eixos maior e menor da elipse $4x^2+y^2-24x-6y+41=0$ é:

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

Exercício 17. Os valores reais de n para os quais a reta (t) $y=x+n$ seja tangente à elipse de equação $2x^2+3y^2=6$ são iguais a:

a) $-\sqrt{5}$ e $\sqrt{5}$.

b) $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$.

c) -3 e 3.

d) -2 e 2.

e) -5 e 5.

Exercício 18. Uma elipse tem centro na origem e vértices em $(2a,0)$ e $(0,a)$, com $a>0$. A área do quadrado inscrito nessa elipse é:

a) $\dfrac{16a^2}{5}$.

b) $\dfrac{4a^2}{5}$.

c) $\dfrac{12a^2}{5}$.

d) $\dfrac{8a^2}{5}$.

e) $\dfrac{20a^2}{5}$.

Exercício 19. O coeficiente angular da reta que é tangente à elipse $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ no primeiro quadrante e que corta o eixo das abscissas no ponto $P(8,0)$ é:

a) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

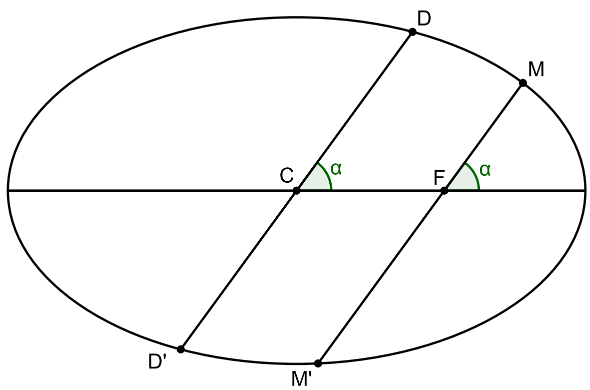
b) $-\dfrac{1}{2}$.

c) $-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

d) $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

e) $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Exercício 20. Considere a elipse a seguir, onde DD' é uma corda passando pelo seu centro, MM' uma corda focal e o eixo maior da elipse é $2a$. Prove que $(DD')^2 = MM' \cdot 2a$.



Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com

Respostas e Soluções.

1. D.

2. Se $a^2 = 25$ e $b^2 = 9$, então $a = 5$ e $b = 3$. Como $a^2 = b^2 + c^2$, então $c = 4$, segue que a distância focal é 8. Resposta A.

3. B.

4. Na equação, temos $a^2 = 32$ e $b^2 = 8$, donde chegamos a $a = 4\sqrt{2}$ e $b = 2\sqrt{2}$. Portanto, $2a + 2b = 8\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$. Resposta C.

5. Se os eixos maior e menor medem 6 e 4, respectivamente, então $a = 3$ e $b = 2$ e, consequentemente, $a^2 = 9$ e $b^2 = 4$. Portanto, sua equação é $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1$. Resposta D.

6. Temos $a = 6$ e $b = 4$. Como o eixo focal é horizontal, chegamos a $\dfrac{(x+2)^2}{36} + \dfrac{(y+3)^2}{16} = 1$.

7. (Extraído da Vídeo Aula) Temos que os eixos maior e focal medem, respectivamente, 8 e 6. Assim, $a = 4$, $c = 3$ e, consequentemente, $b = \sqrt{7}$. Como o centro é a origem, a equação da elipse é $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{7} = 1$.

8. Como $a = 5$ e $b = 3$, então $c^2 = 25 - 9$, segue que $c = 4$. Sendo assim, a excentricidade da elipse é $\dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5}$. Resposta D.

9. Temos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2}{4} + y^2 &= 1\\
x^2 + 4y^2 &= 4\\
(2y+2)^2 + 4y^2 &= 4\\
4y^2 + 8y + 4 + 4y^2 &= 4\\
y^2 + y &= 0\\
y(y+1) &= 0\\
y_1 &= -1\\
y_2 &= 2.
\end{aligned}
$$

Sendo assim, os pontos de interseção entre a reta e a elipse são $A(0,-1)$ e $B(2,0)$, cuja distância entre eles é $AB = \sqrt{(2-0)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{5}$.

10. Temos:

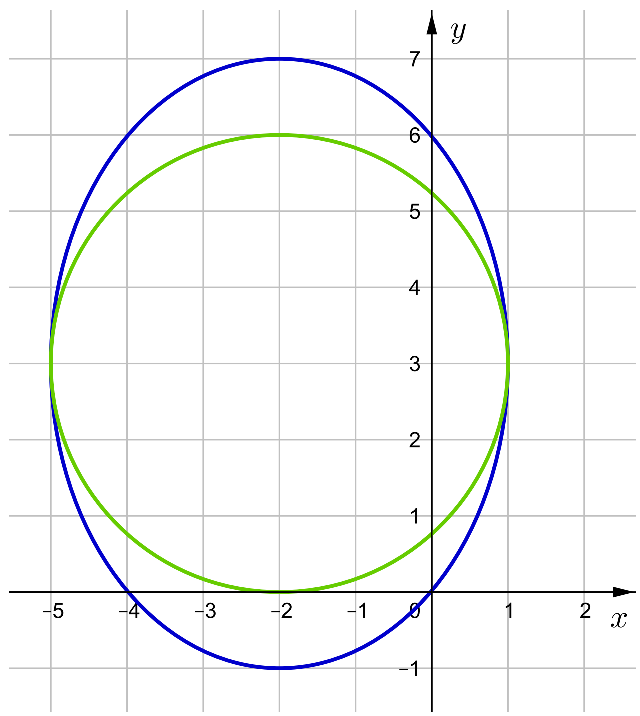
$$
\begin{aligned}
9x^2 + 4y^2 - 72x - 24y + 144 &= 0\\
9x^2 - 72x + 4y^2 - 24y + 144 &= 0\\
9x^2 - 72x + 144 + 4y^2 - 24y + 36 &= 36\\
(3x-12)^2 + (2y-6)^2 &= 36\\
9(x-4)^2 + 4(y-3)^2 &= 36\\
\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} &= 1.
\end{aligned}
$$

Sendo assim, $a = 3$, $b = 2$ e, consequentemente, $c = \sqrt{5}$. Como as coordenadas do centro são $(4,3)$, então as coordenadas dos focos são $(4, 3-\sqrt{5})$ e $(4, 3+\sqrt{5})$.

11. Como $a = \dfrac{8}{2} = 4$, $b = \dfrac{6}{2} = 3$ e o centro está em $(1,-2)$, sua equação é $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y+2)^2}{16} = 1$.

12. Como $a = 5$ e $b = 3$, então $c = 4$ e, consequentemente, as coordenadas dos focos são $F(7,-1)$ e $G(7,-9)$. Assim, temos $d_{FP} + d_{PG} = \sqrt{49+4} + \sqrt{49+100} \cong 19,5 > 10 = 2a$. Portanto, P é exterior à elipse.

13. Como devem ser concêntricas, o centro da circunferência é $O(-2,3)$. Além disso, o raio da circunferência deve ter a mesma medida do semieixo menor da elipse, ou seja, $R = b = 3$. Portanto, a equação da circunferência é $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$. Resposta B.



14. Fazendo a interseção entre a reta e a elipse, temos:

$$
\begin{aligned}
16(x+2)^2 + 9(x+m-3)^2 &= 144\\
16(x^2+4x+4) + 9(x^2+2mx-6x+m^2-6m+9) &= 144\\
25x^2 + (10+18m)x + 9m^2 - 54m + 1 &= 0.
\end{aligned}
$$

Como são tangentes, devemos encontrar apenas um resultado para a equação, ou seja:

$$
\begin{aligned}
\Delta &= 0\\
(10+18m)^2 - 4 \cdot 25 \cdot (9m^2 - 54m + 1) &= 0\\
100 + 360m + 324m^2 - 900m^2 + 5400m - 100 &= 0\\
-576m^2 + 5760m &= 0\\
m_1 &= 0\\
m_2 &= 10.
\end{aligned}
$$

Portanto, a reta é tangente à elipse para dois valores inteiros de m. Resposta B.

15. (Extraído da AFA) Seja P o terceiro vértice do triângulo. Temos então que $AB + AP + BP = 16\ cm$, ou seja, $AP + BP = 10\ cm$. O conjunto de pontos cuja soma das distâncias a dois pontos é constante é o lugar geométrico de uma elipse. Resposta A.

16. (Extraído da AFA) Analisando a equação da elipse, temos:

$$\begin{aligned} 4x^2 + y^2 - 24x - 6y + 41 &= 0 \\ 4x^2 - 24x + 36 + y^2 - 6y + 9 &= -41 + 36 + 9 \\ 4(x-3)^2 + (y-3)^2 &= 4 \\ \frac{(x-3)^2}{1} + \frac{(y-3)^2}{4} &= 1. \end{aligned}$$

Encontramos com isso as medidas dos eixos maior e menor, respectivamente: 4 e 2. Ligando as extremidades dos eixos maior e menor, obtemos um losango cujas diagonais medem 4 e 2, ou seja, sua área é $\dfrac{4 \cdot 2}{2} = 4$. Resposta D.

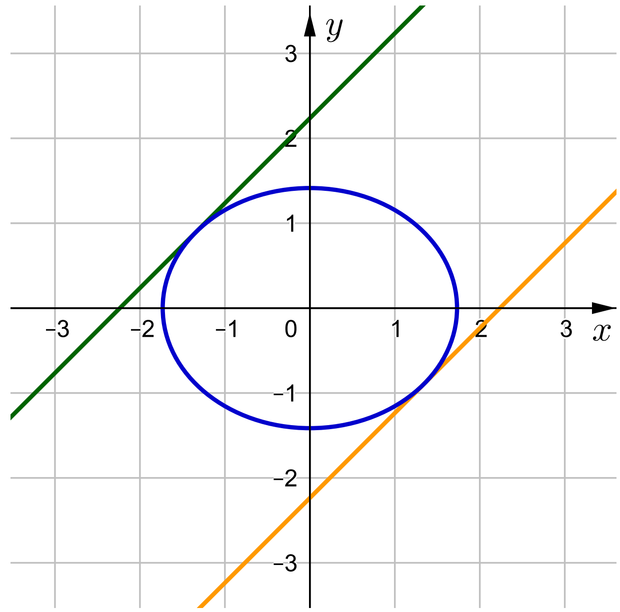
17. (Extraído da EsPCEx - 2016) Substituindo a equação da reta na equação da elipse, temos:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3(x+n)^2 &= 6 \\ 2x^2 + 3(x^2 + 2xn + n^2) - 6 &= 0 \\ 5x^2 + 6nx + 3n^2 - 6 &= 0. \end{aligned}$$

Chegamos a uma equação quadrática na qual devemos encontrar apenas uma solução (na verdade, duas iguais!), pois a reta é tangente à elipse:

$$\begin{aligned} \Delta &= 0 \\ (6n)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (3n^2 - 6) &= 0 \\ 36n^2 - 60n^2 + 120 &= 0 \\ -24n^2 + 120 &= 0 \\ n &= \pm\sqrt{5}. \end{aligned}$$

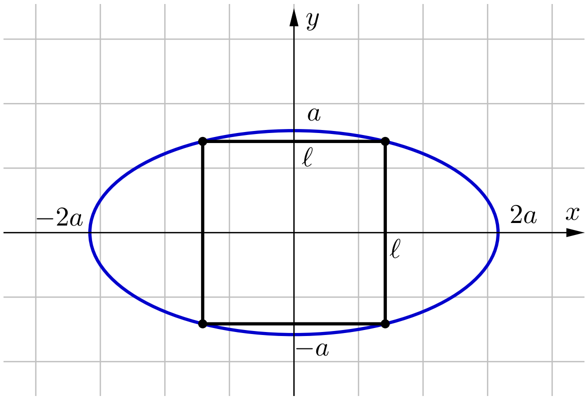
Resposta A.



18. (Extraído da EsPCEx - 2017) Como o centro da elipse está na origem, os demais vértices são $(-2a, 0)$ e $(0, -a)$ e, consequentemente, sua equação é $\dfrac{x^2}{4a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$. Como o quadrado está inscrito na elipse, vamos marcar seu vértice no primeiro quadrante (ℓ, ℓ) e, como este pertence à elipse, temos:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{a^2} &= 1 \\ \frac{\ell^2}{4a^2} + \frac{\ell^2}{a^2} &= 1 \\ 5\ell^2 &= 4a^2 \\ \ell &= \frac{2\sqrt{5}a}{5}. \end{aligned}$$

Como o lado do quadrado mede 2ℓ, sua área é $(2\ell)^2 = 4\left(\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}\right)^2 = \dfrac{16a^2}{5}$. Resposta A.



19. (Extraído do ITA) Como o ponto $P(8,0)$ pertence à reta tangente $t : y = mx + n$, temos $0 = 8m + n$, donde $n = -8m$. Sendo assim, podemos escrever a equação de t como $y = mx - 8m$. Agora vamos verificar a interseção entre a reta e a elipse:

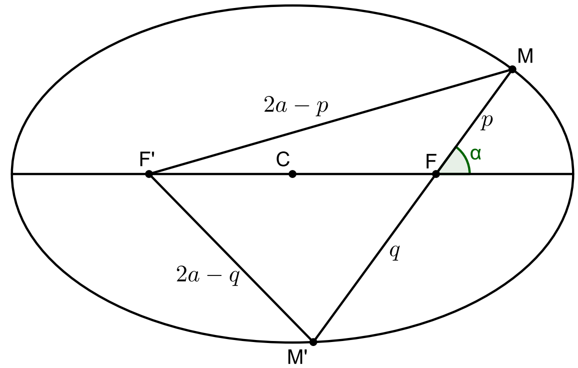
$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} &= 1\\
\frac{x^2}{16} + \frac{(mx-8m)^2}{9} &= 1\\
9x^2 + 16(m^2x^2 - 16m^2x + 64m^2) &= 144\\
(9+16m^2)x^2 - 256m^2x + 1024m^2 - 144 &= 0.
\end{aligned}$$

Como encontramos uma equação quadrática e deve existir apenas um ponto de interseção entre a reta e a elipse, temos:

$$\begin{aligned}
\Delta &= 0\\
\left(-2^8m^2\right)^2 - 4(9+2^4m^2)(2^{10}m^2 - 9\cdot 2^4) &= 0\\
2^{16}m^4 - 9\cdot 2^{12}m^2 + 81\cdot 2^6 - 2^{16}m^4 + 9\cdot 2^{10}m^2 &= 0\\
27\cdot 2^{10}m^2 &= 81\cdot 2^6\\
m &= \pm\frac{\sqrt{3}}{4}.
\end{aligned}$$

Como a interseção ocorre no primeiro quadrante, a reta é decrescente, ou seja, $m = -\frac{\sqrt{3}}{4}$. Resposta D.

20. (Extraído do IME - 2018) Sejam F e F' os focos da elipse, p o comprimento de FM e q o comprimento de FM'.



Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo $FF'M'$, temos $(2a-q)^2 = (2c)^2 + q^2 - 2\cdot 2c\cdot q\cdot\cos\alpha$, donde chegamos a $q = \frac{b^2}{a - c\cos\alpha}$. De forma análoga, chegamos a $p = \frac{b^2}{a + c\cos\alpha}$. Portanto $MM' = p + q = \frac{2ab^2}{a^2 - c^2\cos^2\alpha}$ e, consequentemente, $MM'\cdot 2a = \frac{4a^2b^2}{a^2 - c^2\cos^2\alpha}$. Supondo agora o centro da elipse no centro do sistema de coordenadas cartesianas, temos que sua equação é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Fazendo $CD = CD' = z$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{(z\cos\alpha)^2}{a^2} + \frac{(z\,\mathrm{sen}\,\alpha)^2}{b^2} = 1 &\\
z^2b^2(\cos\alpha)^2 + z^2a^2[1 - (\cos\alpha)^2] &= a^2b^2\\
z^2b^2(\cos\alpha)^2 + z^2a^2 - z^2a^2(\cos\alpha)^2 &= a^2b^2\\
z^2a^2 - z^2c^2(\cos\alpha)^2 &= a^2b^2\\
z^2 &= \frac{a^2b^2}{a^2 - c^2(\cos\alpha)^2}\\
4z^2 &= \frac{4a^2b^2}{a^2 - c^2(\cos\alpha)^2}\\
(DD')^2 &= MM'\cdot 2a.
\end{aligned}$$

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com