Módulo de Introdução ao Cálculo - Funções - Parte 01

Composição de Funções

Tópicos Adicionais

Composição de Funções

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 2$ e $g(x) = 3x + 2$. Encontre as expressões de $f \circ g$ e $g \circ f$.

Exercício 2. Se $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, determine uma expressão para $f(f(x))$.

Exercício 3. Determine o valor de a para o qual as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 2x - 7$ e $g(x) = 3x + a$ satisfaçam $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

Exercício 4. Sejam $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2 + 1$ e $h(x) = x + 2$. Encontre a expressão $h \circ (g \circ f)$.

Exercício 5. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 4 \text{ se } x \geq 1 \\ \\ 3x + 4 \text{ se } x < 1 \end{cases}$$

e $g(x) = x - 3$ Obtenha a lei de formação de $f \circ g$.

Exercício 6. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = \sqrt{x-1}$ e $g(x) = x^2 - 5x + 7$. Determine o domínio maximal de $f(g(x))$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 7. Se $f(x) = x^2$ e $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, dermine expressões para $f(g(x))$ e $g(f(x)))$.

Exercício 8. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(f(x)) = x \cdot f(x)$. Determine o valor de $f(0)$.

Exercício 9. Se $f(x) = x^2 - 2x$, determine a soma dos valores de x para os quais $f(x) = f(f(x))$.

Exercício 10. Se $f(2x) = \dfrac{2}{2+x}$ para todo $x > 0$, então $2f(x)$ é igual a:

a) $\dfrac{2}{1+x}$ b) $\dfrac{2}{2+x}$ c) $\dfrac{4}{1+x}$

d) $\dfrac{4}{2+x}$ e) $\dfrac{8}{4+x}$.

Exercício 11. Se $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, então $f(2x)$ é igual a: a) $\dfrac{3f(x)+1}{f(x)+3}$ b) $\dfrac{3f(x)-1}{f(x)+3}$ c) $\dfrac{3f(x)-1}{f(x)-3}$

d) $\dfrac{3f(x)+1}{f(x)-3}$ e) $\dfrac{2f(x)+3}{f(x)-2}$

Exercício 12. Sejam as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tais que $g(x) = 3x - 2$ e $f \circ g(x) = 6x + 1$. Determine

a) $f(4)$.

b) $f(x)$.

Exercício 13. Seja f uma função, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, bijetiva tal que $f(x+3) = 2x - 1$. Determine $f^{-1}(x)$.

Exercício 14. Seja f um função, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, bijetiva tal que $f(x) = \sqrt[3]{x} + 2$. Determine $f^{-1}(1)$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 15. Seja $f : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \to \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ dada por $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$, para todo $x \neq \pm 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, encontre a expressão que define $f^n = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ vezes}}$

Exercício 16. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções tais que $g(x) = 2x - 3$ e $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 4x + 1$. Encontre uma expressão que fornece $f(x)$ em termos de x.

Exercício 17. Se $f(x) = 3x - 2$ e $g(f(x)) = f((x/3) + 2)$ são funções reais, encontre o valor de $g(7)$.

Exercício 18. Sejam as funções reais definidas por $f(x) = 2x + 5$ e $f(g(x)) = x$. Encontre o valor de $g(7)$.

Exercício 19. Considete $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ definida por $f\left(\dfrac{x-2}{3x}\right) = \dfrac{3x-5}{2x+1}$. Encontre uma expressão para $f(x+1)$.

Exercício 20. Uma função real de variável real f é tal que $f(1/2) = \sqrt{a}$, sendo a um número real positivo, e $f(x+1) = x \cdot f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Determine $f(7/2)$.

Exercício 21. Seja uma função f, de A e B, sendo A e B conjuntos que possibilitem a composição de f com ela mesma. Se $f(x) = \dfrac{x+3}{1-x}$, determine $f(f(x))$.

Respostas e Soluções.

1.

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f(3x+2)\\ &= 2\\ (g\circ f)(x) &= g(f(x))\\ &= g(2)\\ &= 3\cdot 2+2\\ &= 8.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}f(f(x)) &= \frac{1}{1+f(x)}\\ &= \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}\\ &= \frac{x+1}{x+2}.\end{aligned}$$

3. Temos

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x) &= f(3x+a)\\ &= 2(3x+a)-7\\ &= 6x+2a-7\\ (g\circ f)(x) &= g(2x-7)\\ &= 3(2x-7)+a\\ &= 6x-21+a.\end{aligned}$$

Assim, devemos ter $2a-7=-21+a$, ou seja, $a=-14$.

4.

$$\begin{aligned}h\circ(g\circ f)(x) &= h(g(x+1))\\ &= h((x+1)^2+1)\\ &= (x+1)^2+3\\ &= x^2+2x+4.\end{aligned}$$

5. Temos $(f\circ g)(x)=f(x-3)$. Se $x-3=y$, temos duas situações

(a) $y\geq 1$ se, e somente se, $x-3\geq 1$, ou seja, $x\geq 4$. Nesse caso,

$$\begin{aligned}f(g(x)) &= f(y)\\ &= y^2+2y+4\\ &= (x-3)^2+2(x-3)+4\\ &= x^2-4x+7.\end{aligned}$$

(b) $y<1$ se, e somente se, $x-3<1$, ou seja, $x<4$. Nesse caso,

$$\begin{aligned}f(g(x)) &= f(y)\\ &= 3y+4\\ &= 3(x-3)+4\\ &= 3x-5.\end{aligned}$$

Portanto,

$$f(g(x))=\begin{cases}x^2-4x+7 \text{ se } x\geq 4\\[2ex] 3x-5 \text{ se } x<4\end{cases}$$

6.

$$\begin{aligned}f(g(x)) &= f(x^2-5x+7)\\ &= \sqrt{x^2-5x+7-1}\\ &= \sqrt{(x-2)(x-3)}\end{aligned}$$

Precisamos que $(x-2)(x-3)>0$. Isso ocorre para $x<2$ e $x>3$. Portanto, domínio maximal é $(-\infty,2)\cup(3,\infty)$.

7. Temos

$$\begin{aligned}g(f(x)) &= \frac{1}{f(x)^2+1}\\ &= \frac{1}{(x^2)^2+1}\\ &= \frac{1}{x^4+1}.\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}f(g(x)) &= (g(x))^2\\ &= \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2\\ &= \frac{1}{x^4+2x^2+1}.\end{aligned}$$

8. Fazendo $x=0$, temos $f(f(0))=0\cdot f(0)=0$. Seja $c=f(0)$, então $f(c)=0$. Fazendo $x=c$ na indentidade do problema, temos $f(0)=f(f(c))=c\cdot f(c)=0$.

9. Se

$$\begin{aligned}f(x) &= f(f(x))\\ x^2-2x &= (x^2-2x)^2-2(x^2-2x)\\ x^2-2x &= x^4-4x^3+2x^2+4x\\ x^4-4x^3+x^2+6x &= 0\end{aligned}$$

Para encontrar as raízes dessa equação, seja $y=x^2-2x$. Queremos que $y=y^2-2y$, ou seja, $y^2=3y$. Se $y\neq 0$, isso é o mesmo que $y=3$. Para esse valor, $x^2-2x-3=0$ e a soma das raízes dessa equação, que são distintas, é 2. Se $y=0$, $x^2-2x=0$ e as raízes são 0 e 2. Portanto, a soma dos valores de x é $2+2+0=4$.

10.

$$
\begin{aligned}
2f(x) &= 2\cdot f(2\cdot(x/2))\\
&= 2\cdot\frac{2}{2+x/2}\\
&= 2\cdot\frac{4}{4+x}\\
&= \frac{8}{4+x}
\end{aligned}
$$

Resposta alternativa E.

11. Como

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x-1+2}{x-1}\\
f(x) &= 1+\frac{2}{x-1}\\
f(x)-1 &= \frac{2}{x-1}\\
x-1 &= \frac{2}{f(x)-1}\\
x &= \frac{2}{f(x)-1}+1\\
x &= \frac{f(x)+1}{f(x)-1},
\end{aligned}
$$

segue que

$$
\begin{aligned}
f(2x) &= \frac{2x+1}{2x-1}\\
&= \frac{2\cdot\dfrac{f(x)+1}{f(x)-1}+1}{2\cdot\dfrac{f(x)+1}{f(x)-1}-1}\\
&= \frac{\dfrac{3f(x)+1}{f(x)-1}}{\dfrac{f(x)+3}{f(x)-1}}\\
&= \frac{3f(x)+1}{f(x)+3}.
\end{aligned}
$$

Resposta alternativa A.

12.

a) Se queremos $f(4)$, devemos ter $g(x)=4$, sendo que isso ocorre para $x=2$. Portanto, temos $f(4)=f(g(2))=6\cdot 2+1=13$.

b) Se $f(g(x))=f(3x-2)=6x+1$, então fazendo $x=\frac{k+2}{3}$,temos $f(k)=6\cdot\frac{k+2}{3}+1=2k+5$, ou seja, $f(x)=2x+5$.

13. Substituindo x por $k-3$, temos $f(k-3+3)=2(k-3)-1$, ou seja, $f(k)=2k-7$. Temos então que $f(x)=2x-7$. Como queremos a inversa, basta isolar x, ou seja, $x=\frac{f(x)+7}{2}$. Concluímos que $f^{-1}(x)=\frac{x+7}{2}$.

14. A inversa é dada por $f^{-1}(x)=(x-2)^3$. Assim,

$$f^{-1}(1)=(1-2)^3=-1.$$

15. Comecemos encontrando expressões para f^n para os primeiros naturais:

$$
\begin{aligned}
f^2 &= f(f(x))\\
&= \frac{1-f(x)}{1+f(x)}\\
&= \frac{1-\dfrac{1-x}{1+x}}{1+\dfrac{1-x}{1+x}}\\
&= x.
\end{aligned}
$$

Portanto f^2 é a função identidade Id. Assim,

$$
\begin{aligned}
f^3 &= f\circ Id\\
&= f\\
f^4 &= f\circ f^3\\
&= f\circ f\\
&= Id.
\end{aligned}
$$

Em geral, se $f^{2k}=Id$ e $f^{2k+1}=f$, teremos

$$
\begin{aligned}
f^{2k+2} &= f(f^{2k+1})\\
&= f\circ f\\
&= Id.
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
f^{2k+3} &= f\circ f^{2k+2}\\
&= f\circ Id\\
&= f.
\end{aligned}
$$

consequentemente, para os índices ímpares, a composição será igual a f e para os pares será igual a função identidade.

16. Seja $y=2x-3$. Então $x=(y+3)/2$ e

$$
\begin{aligned}
f(g(x)) &= f(y)\\
&= 2x^2-4x+1\\
&= 2\left(\frac{y+3}{2}\right)^2-4\left(\frac{y+3}{2}\right)+1\\
&= \frac{y^2+6y+9}{2}-\frac{4y+12}{2}+\frac{2}{2}\\
&= \frac{y^2+10y+23}{2}.
\end{aligned}
$$

Portanto, a expressão procurada é $f(x) = \dfrac{x^2 + 10x + 23}{2}$.

17. Para que $f(x) = 7$ devemos ter $3x - 2 = 7$, ou seja, $x = 3$. Assim,

$$\begin{aligned} g(f(3)) &= f((3/3) + 2) \\ g(7) &= f(3) \\ g(7) &= 3 \cdot 3 - 2. \\ g(7) &= 7. \end{aligned}$$

18. Note que $f(x) = 7$ se, e somente se, $2x + 5 = 7$, ou seja, $x = 1$. Como $f(g(7)) = 7$, podemos concluir que $g(7) = 1$.

19. Escreva $y + 1 = \dfrac{x-2}{3x}$. Assim,

$$\begin{aligned} 3xy + 3x &= x - 2 \\ x(3y + 3 - 1) &= -2 \\ x &= \frac{-2}{3y+2}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{3x-5}{2x+1} &= \frac{\dfrac{-6}{3y+2} - 5}{\dfrac{-4}{3y+2} + 1} \\ &= \frac{\dfrac{-6 - 5(3y+2)}{3y+2}}{\dfrac{-4 + 3y + 2}{3y+2}} \\ &= \frac{-15y - 16}{3y - 2}. \end{aligned}$$

Portanto $f(y+1) = \dfrac{-15y - 16}{3y - 2}$.

20. Inicialmente, fazendo $x = 1/2$, temos

$$f\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{a}}{2}.$$

Agora, com $x = 3/2$, ficamos com

$$f\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{3}{2} \cdot f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{a}}{4}.$$

Por fim, seguindo para $x = 5/2$, chegaremos a

$$f\left(\frac{5}{2} + 1\right) = \frac{5}{2} \cdot f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{15\sqrt{a}}{8},$$

ou seja, $f\left(\dfrac{7}{2}\right) = \dfrac{15\sqrt{a}}{8}$.

21.

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= \frac{f(x) + 3}{1 - f(x)} \\ &= \frac{x+3}{1-x} \\ &= \frac{\dfrac{x+3}{1-x} + 3}{1 - \dfrac{x+3}{1-x}} \\ &= \frac{\dfrac{-2x+6}{1-x}}{\dfrac{-2x-2}{1-x}} \\ &= \frac{-2(x-3)}{-2(x+1)} \\ &= \frac{(x-3)}{(x+1)}. \end{aligned}$$

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com