Estudo de Triângulos - Teorema de Menelaus e Relação de Stewart

Teorema de Menelaus

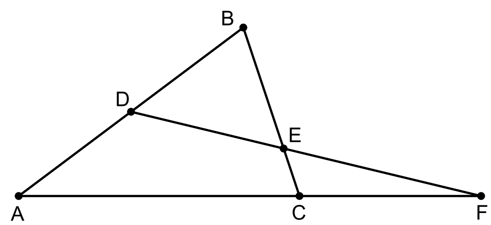
9° ano E.F.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

Estudo de Triângulos - Teorema de Menelaus e Relação de Stewart
Teorema de Menelaus

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Um segmento intercepta os lados de um triângulo ABC nos pontos D, E, F, conforme a figura. Se $AD = BD = 6$, $BE = CF = 5$ e $CE = 2$, a medida do lado AC é:



a) $\dfrac{11}{2}$.

b) $\dfrac{13}{2}$.

c) $\dfrac{15}{2}$.

d) $\dfrac{17}{2}$.

e) $\dfrac{19}{2}$.

Exercício 2. Um triângulo equilátero é interceptado por uma reta r no ponto médio D do lado AB, no ponto E lado AC de forma que $AE = 2EC$. Qual a medida do prolongamento do lado BC até a interseção com a reta r, em função da medida l do lado do triângulo?

a) $0,8l$.

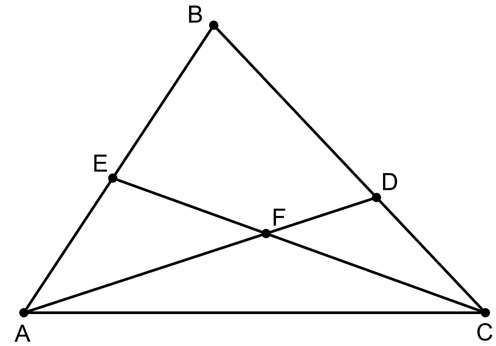
b) l.

c) $1,2l$.

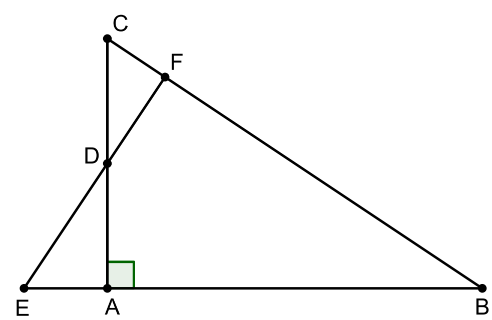
d) $1,5l$.

e) $2l$.

Exercício 3. No triângulo ABC da figura, os segmentos AD e CE se intersectam em F. Se $\dfrac{AE}{EB} = \dfrac{1}{3}$ e $\dfrac{CD}{DB} = \dfrac{1}{2}$, determine $\dfrac{EF}{FC} + \dfrac{AF}{FD}$.

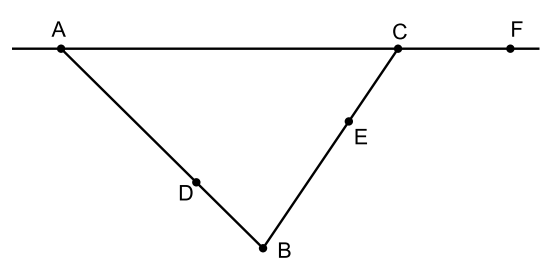


Exercício 4. No triângulo retângulo ABC, D é ponto médio de AC, $AB = 9$, $AE = 3$, $BF = 8$ e $FC = 2$. Mostre que os pontos E, D e F estão alinhados.



Exercício 5. No triângulo equilátero ABC de 72 cm de perímetro, M é o ponto médio de AB, N é ponto de AC e E é ponto da reta suporte de BC tal que $CE = 16$ cm. Determine CN.

Exercício 6. Verifique se os pontos D, E e F estão alinhados, sendo $AD = 6$, $DB = 2$, $BE = 5$, $EC = 2$, $CF = 2$ e $AC = 8$.



2 Exercícios de Fixação

Exercício 7. No triângulo ABC, retângulo em C, P e Q estão sobre os lados BC e AC, respectivamente, tais que $CP = CQ = 2$. Pelo ponto de interseção R de AP e BQ, uma reta é desenhada passando também por C e cortando AB em S. O prolongamento de PQ corta AB em T. Se $AB = 10$ e $AC = 8$, determine TS.

Exercício 8. No triângulo ABC, traça-se a mediana BM e a ceviana AD, tal que a interseção N de BM e AD ocorra no ponto médio de BM. Se $AN = 12$, determine DN.

Exercício 9. Seja um triângulo ABC qualquer cujo baricentro é o ponto G. Se $AG = 2$, determine GD, sendo D ponto médio de BC.

Exercício 10. Seja o triângulo ABC, M ponto médio de BC, D a altura relativa a AB e N o ponto médio de AD. Se $AB = 8$ e $CD = 6$, determine MN.

Exercício 11. O lado AB de um quadrado é prolongado, no sentido de A para B, até o ponto P tal que $BP = 2AB$, com M ponto médio de CD, PM é desenhado intersectando AC em Q. PQ corta BC em R. Calcule $\dfrac{CR}{RB}$.

Exercício 12. Seja o triângulo ABC tal que $AB = 6$ e $AC = 8$. Uma reta intersepta os prolongamentos dos lados BC, AB e AC nos pontos P, Q e R respectivamente. Se $BP = 8$, $BQ = 2$ e $CR = 12$, determine BC.

Exercício 13. Um círculo passando pelos vértices B e C de um triângulo ABC corta AB em P e AC em R. Se PR corta BC em Q, prove que:

$$\frac{QC}{QB} = \frac{RC \cdot AC}{PB \cdot AB}.$$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 14. Mostre que as medianas de um triângulo qualquer se intersectam em um ponto.

Exercício 15. No quadrilátero $ABCD$, as retas AB e CD se cortam em P, enquanto as retas AD e BC se cortam em Q. As diagonais AC e BD cortam PQ em X e Y. Prove que $\dfrac{PX}{XQ} = \dfrac{PY}{YQ}$.

Exercício 16. Mostre que as bissetrizes internas de um triângulo qualquer se intersectam em um ponto.

Exercício 17. Prove que as bissetrizes de dois ângulos de um triângulo isósceles e a bissetriz externa do terceiro ângulo do triângulo intersectam os lados opostos em três pontos colineares.

ELABORADO POR CLEBER ASSIS E TIAGO MIRANDA
PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
contato@cursoarquimedes.com

Respostas e Soluções.

1. Aplicando o teorema de Menelaus no triângulo ABC, temos:

$$\begin{aligned}\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA} &= 1\\ \frac{6}{6}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{AC+5} &= 1\\ AC+5 &= \frac{25}{2}\\ AC &= \frac{15}{2}.\end{aligned}$$

Resposta C.

2. Seja F o ponto de interseção do prolongamento de BC e a reta r e $l = 6a$ a medida do lado do triângulo. Temos, pelo teorema de Menelaus:

$$\begin{aligned}\frac{BD}{DA}\cdot\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CF}{FB} &= 1\\ \frac{3a}{3a}\cdot\frac{4a}{2a}\cdot\frac{CF}{CF+6a} &= 1\\ CF+6a &= 2CF\\ CF &= 6a.\end{aligned}$$

Portanto, o segmento CF tem a mesma medida do lado do triângulo: l. Resposta B.

3. (Extraído da Vídeo Aula) Aplicando o teorema de Menelaus no triângulo ABD, temos:

$$\begin{aligned}\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BC}{CD}\cdot\frac{DF}{FA} &= 1\\ \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{FD}{AF} &= 1\\ \frac{AF}{FD} &= 1.\end{aligned}$$

Aplicando agora o mesmo teorema ao triângulo BCE, temos:

$$\begin{aligned}\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BA}{AE}\cdot\frac{EF}{FC} &= 1\\ \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{EF}{FC} &= 1\\ \frac{EF}{FC} &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Portanto $\dfrac{EF}{FC}+\dfrac{AF}{FD}=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$.

4. Como D é ponto médio de AC, então $CD = DA$. Assim, temos:

$$\begin{aligned}\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CD}{DA} &=\\ \frac{3}{12}\cdot\frac{8}{2}\cdot\frac{CD}{CD} &= 1.\end{aligned}$$

Pelo teorema de Menelaus, no triângulo ABC, os pontos D, E e F estão alinhados.

5. (Extraído da Vídeo Aula) A medida do lado do triângulo ABC é $\dfrac{72}{3} = 24\ cm$. Pelo teorema de Menelaus no triângulo ABC, temos:

$$\begin{aligned}\frac{AN}{CN}\cdot\frac{CE}{EB}\cdot\frac{BM}{MA} &= 1\\ \frac{24-CN}{CN}\cdot\frac{16}{40}\cdot\frac{12}{12} &= 1\\ 5CN &= 48-2CN\\ 7CN &= 48\\ CN &= \frac{48}{7}.\end{aligned}$$

6. Temos:

$$\begin{aligned}\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA} &=\\ \frac{6}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{10} &=\\ \frac{3}{2} &\neq 1.\end{aligned}$$

Portanto, pelo teorema de Menelaus no triângulo ABC, os pontos D, E e F NÃO estão alinhados.

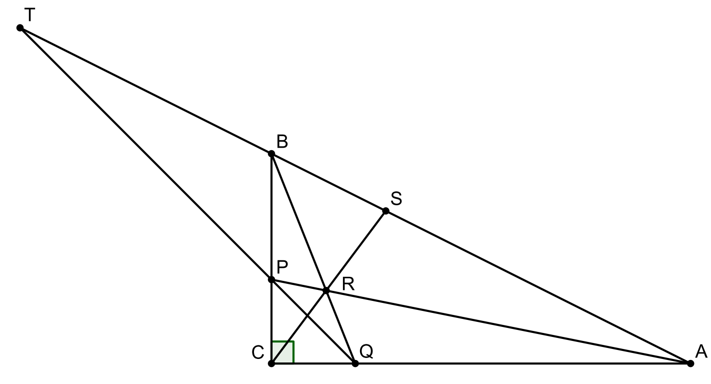
7. Como $AB = 10$ e $AC = 8$, então, pelo teorema de Pitágoras, $BC = 6$. Pelo teorema de Menelaus no triângulo ABC, temos:

$$\begin{aligned}\frac{AQ}{QC}\cdot\frac{CP}{PB}\cdot\frac{BT}{TA} &= 1\\ \frac{6}{2}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{BT}{BT+10} &= 1\\ 3BT &= 2BT+20\\ BT &= 20.\end{aligned}$$

Aplicando o teorema de Ceva ao triângulo ABC, temos:

$$\begin{aligned}\frac{AQ}{QC}\cdot\frac{CP}{PB}\cdot\frac{BS}{SA} &= 1\\ \frac{6}{2}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{BS}{10-BS} &= 1\\ 3BS &= 20-2BS\\ BS &= 4.\end{aligned}$$

Temos, portanto, $TS = BT + BS = 20 + 4 = 24$.



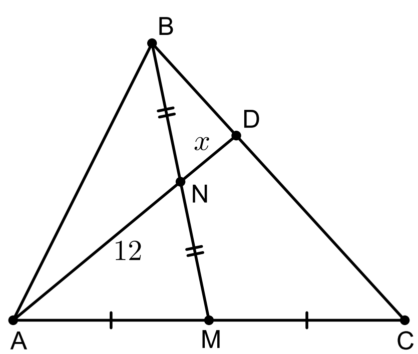
8. (Extraído da Vídeo Aula) Aplicando o teorema de Menelaus no triângulo ACD, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{AM}{MC}\cdot\frac{CB}{BD}\cdot\frac{DN}{NA} &= 1\\
\frac{AM}{AM}\cdot\frac{CB}{BD}\cdot\frac{x}{12} &= 1\\
\frac{CB}{BD} &= \frac{12}{x}.
\end{aligned}$$

Aplicando agora o teorema de Menelaus no triângulo BCM, temos:

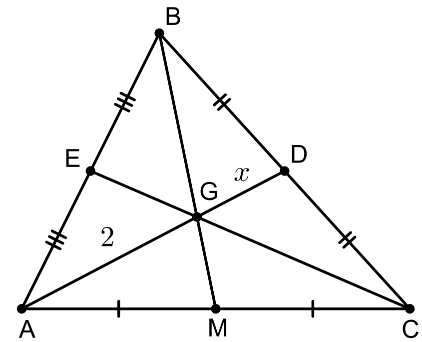
$$\begin{aligned}
\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BN}{NM}\cdot\frac{MA}{AC} &= 1\\
\frac{CB-BD}{BD}\cdot\frac{BN}{BN}\cdot\frac{MA}{2MA} &= 1\\
2BD &= CB-BD\\
\frac{CB}{BD} &= 3.
\end{aligned}$$

Voltando ao primeiro resultado, temos $\dfrac{12}{x}=3$, segue $x=4$.

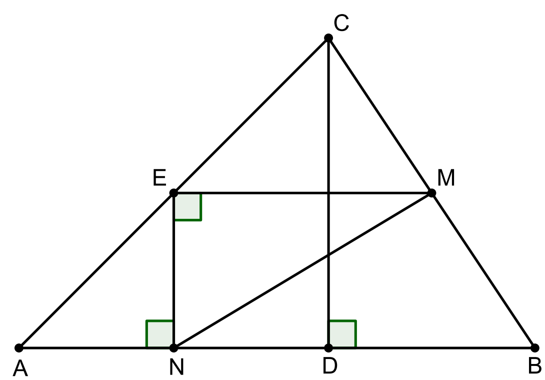


9. Marcando M, ponto médio de AC e aplicando o teorema de Menelaus no triângulo ADC, temos:

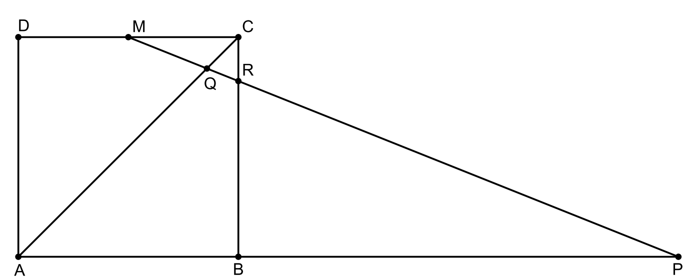
$$\begin{aligned}
\frac{AM}{MC}\cdot\frac{CB}{BD}\cdot\frac{DG}{GA} &= 1\\
\frac{AM}{AM}\cdot\frac{2BD}{BD}\cdot\frac{x}{2} &= 1\\
x &= 1.
\end{aligned}$$



10. (Extraído da Vídeo Aula) A perpendicular a AD por N interceptará AC no ponto méido E, pois esta perpendicular será paralela a CD e NE é base média de ACD, em relação a CD, medindo, consequentemente, a metade de CD, ou seja, 3. Como M é ponto médio de BC e E é ponto médio de AC, então ME é base média de ABC em relação a AB, medindo 4 (metade de AB). Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo MNE, retângulo em E, temos $MN^2=3^2+4^2$, segue que $MN=5$.



11. (Extraído da Vídeo Aula) Como CM é paralelo a AP, os triângulo CMQ e APQ são semelhantes sendo a razão de semelhança igual $\dfrac{1}{6}$, pois $AP=3a$ e $CM=\dfrac{a}{2}$, sendo a a medida do lado do quadrado. Sendo assim, $\dfrac{MQ}{QP}=\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{1}{6}$. De forma análoga, temos os triângulos CMR e BPR também semelhantes, sendo $\dfrac{CR}{RB}=\dfrac{MR}{RP}=\dfrac{CM}{BP}=\dfrac{1}{4}$.

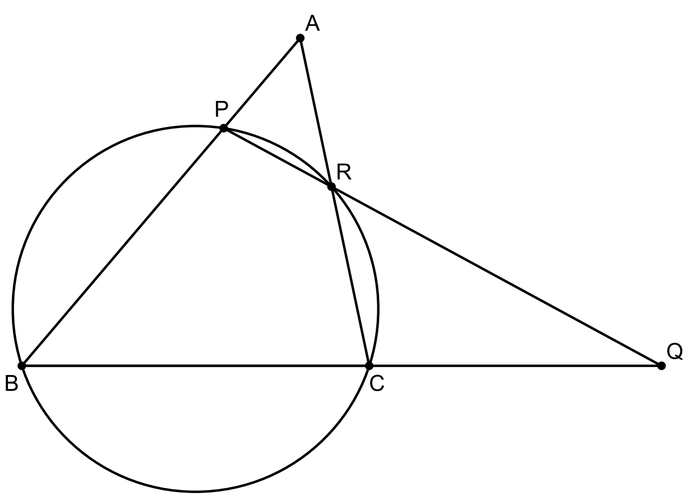


12. Pelo teorema de Menelaus, temos:

$$\begin{aligned}\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CR}{RA} &= 1\\ \frac{8}{2}\cdot\frac{8}{8+BC}\cdot\frac{12}{20} &= 1\\ 40+5BC &= 96\\ BC &= \frac{56}{5}.\end{aligned}$$

13. Pela potência de ponto (ponto A), temos $PA\cdot AB = AR\cdot AC$, ou seja, $\dfrac{AR}{PA}=\dfrac{AB}{AC}$. Aplicando o teorema de Menelaus no triângulo ABC e usando a relação encontrada, temos:

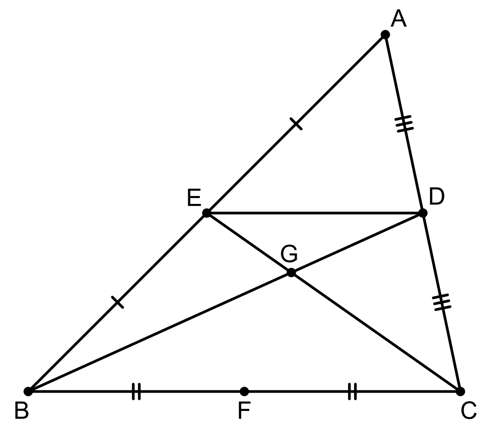
$$\begin{aligned}\frac{QC}{QB}\cdot\frac{BP}{PA}\cdot\frac{AR}{RC} &= 1\\ \frac{QC}{QB}\cdot\frac{BP}{RC}\cdot\frac{AB}{AC} &= 1\\ \frac{QC}{QB} &= \frac{RC\cdot AC}{PB\cdot AB}.\end{aligned}$$



14. Vamos marcar os pontos médios dos lados AB, AC e BC, E, D e F, respectivamente. Traçando as medianas BD e CE, temos a interseção G. Se D e E são pontos médios dos lados AC e AB, então o segmento DE é base média do triângulo ABC em relação à base BC e, consequentemente, os triângulos BCG e DEG são semelhantes, sendo a razão de semelhança igual a dois, pois $\dfrac{BC}{DE}=2$. Temos que:

$$\begin{aligned}\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CA}{AD}\cdot\frac{DG}{GB} &=\\ \frac{BF}{BF}\cdot\frac{2AD}{AD}\cdot\frac{DG}{2DG} &= 1.\end{aligned}$$

Portanto, pelo teorema de Menelaus no triângulo BCD, os pontos A, G e F estão alinhados e, consequentemente, a mediana AF intersecta as outras duas medianas em um ponto G, que é o baricentro.



15. Usando o teorema de Ceva no triângulo APQ, temos:

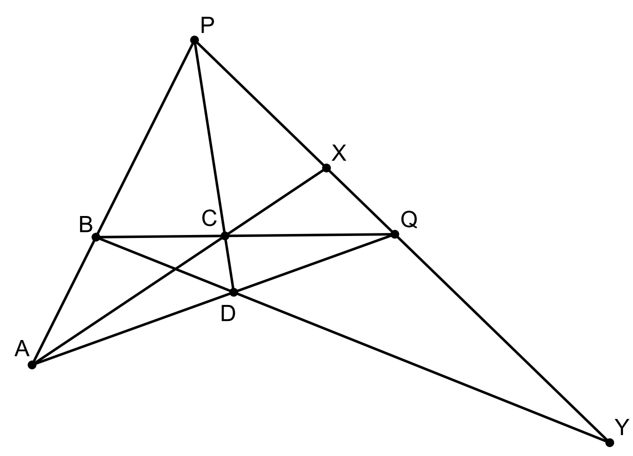
$$\frac{PX}{XQ}\cdot\frac{QD}{DA}\cdot\frac{AB}{BP}=1.$$

Aplicando o teorema de Menelaus no triângulo APQ pela reta que contém B, D e Y, obtemos:

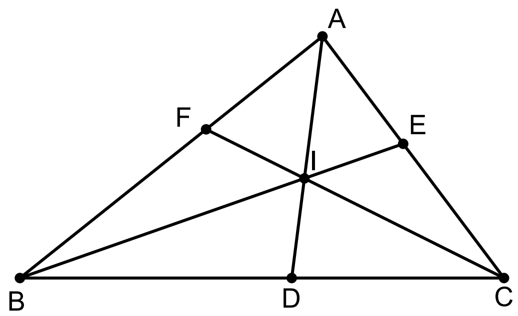
$$\frac{PY}{YQ}\cdot\frac{QD}{DA}\cdot\frac{AB}{BP}=1.$$

Comparando os dois resultados, chegamos a:

$$\frac{PX}{XQ}=\frac{PY}{YQ}.$$



16. Vamos marcar as intersecções D, E e F das bissetrizes internas com os lados BC, AC e BC, respectivamente. Pelo teorema da bissetriz interna, temos $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$, $\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{BC}{AB}$ e $\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{AC}{BC}$. Temos também que $\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{AB}{AC}\cdot\dfrac{BC}{AB}\cdot\dfrac{AC}{BC}=1$. Portanto, pelo teorema de Ceva, as bissetrizes internas de um triângulo qualquer se intersectam em um ponto.



17. (Extraído do POTI)No triângulo ABC, BM e CN são bissetrizes internas dos ângulos $\angle B$ e $\angle C$, respectivamente, e AL é a bissetriz externa do ângulo $\angle A$. Pelo teorema da bissetriz interna temos que $\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{AB}{BC}$ e $\dfrac{BN}{NA} = \dfrac{BC}{AC}$. Além disso, pelo teorema da bissetriz externa temos que $\dfrac{CL}{BL} = \dfrac{AC}{AB}$. Assim,

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{BN}{NA} \cdot \frac{CL}{BL} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1.$$

Portanto, pelo teorema de Menelaus, N, M e L são colineares.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com