Cônicas

Exercícios - Parte II

3° ano E.M.

Material elaborado por Lorena Bulhosa

Cônicas
Exercícios - Parte II

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Classifique as cônicas a seguir em elipse, parábola ou hipérbole.

a) $x^2 + 4xy + y^2 = 1$

b) $4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$

c) $x^2 + 2xy + y^2 - x + y + 1 = 0$

d) $-5x^2 + 26xy - 5y^2 - 72 = 0$

e) $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 4y = 0$

f) $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 15x + 17y + 15 = 0.$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 2. Identifique as cônicas do exercício anterior e faça um esboço das curvas.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 3. Sejam xOy um sistema de eixos ortogonais e XOY o sistema de eixos obtido por uma rotação de 60^o no sentido anti-horário do sistema xOy.

a) Se uma parábola é dada por $(Y-2)^2 = 8(X-1)$ nas coordenadas X e Y, determine seu vértice e sua diretriz nas coordenadas x e y.

b) Faça um esboço da curva no sistema xOy.

Exercício 4. Sejam xOy um sistema de eixos ortogonais e XOY o sistema de eixos obtido por uma rotação de 30^o no sentido anti-horário do sistema xOy.

a) Se uma curva é dada por $4(X-2)^2 + (Y-1)^2 = 4$ nas coordenadas X e Y, determine o centro e os focos da cônica nas coordenadas x e y.

b) Faça um esboço da curva no sistema xOy.

c) Mostre que a reta

$$r : (2\sqrt{3}+1)x + (2-\sqrt{3})y + 2 = 0$$

não intersecta a cônica.

Exercício 5. Identifique a cônica $C : 13x^2 + 10xy + 13y^2 - 72 = 0$. Em seguida, mostre que a reta $r : 3\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 6 = 0$ intersecta a cônica em dois pontos.

Exercício 6. Considere a cônica

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 18x - 16y + 39 = 0.$$

a) Identifique a cônica.

b) Determine seus elementos principais nas coordenadas x e y.

c) Faça um esboço da curva.

Exercício 7. Considere a cônica

$$x^2 - 6xy + y^2 + 2x - 8y - 4 = 0.$$

a) Identifique a cônica.

b) Determine as coordenadas x e y do centro e dos vértices da cônica.

c) Faça um esboço da curva.

Respostas e Soluções.

1. Para cada ítem calcule o discriminante $B^2 - 4AC$. A cônica é uma elipse se esse valor for negativo, é uma parábola se for nulo e é uma hipérbole se for positivo.

a) Hipérbole b) Elipse c) Parábola d) Hipérbole e) Elipse f) Parábola.

2. Nos ítens a, b e c substitua as equações de rotação

$$\begin{cases} x = X\cos\theta - Y\sin\theta \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta \end{cases}$$

na equação da cônica e escolha um ângulo θ tal que o coeficiente do termo misto xy seja nulo.

a) Substituindo as equações de rotação e usando que $sen^2 x + cos^2 x = 1$, temos

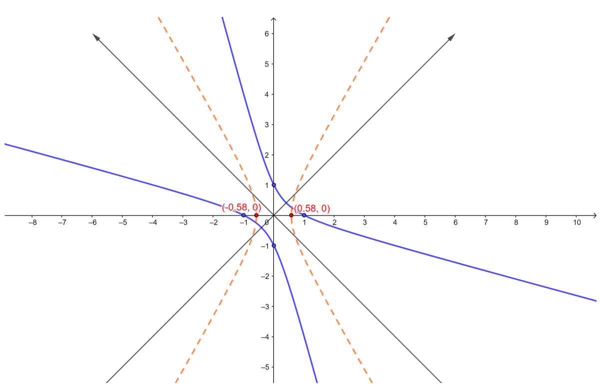
$$(1 + 4\sin\theta\cos\theta)X^2 + (1 - 4\sin\theta\cos\theta)Y^2 + 4(\cos^2\theta - \sin^2\theta)XY = 1.$$

Para eliminar o termo misto XY devemos ter $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 0$, o que implica $|\cos\theta| = |\sin\theta|$. Podemos escolher o ângulo $\theta = 45^o$. Temos $\cos\theta = \sin\theta = \sqrt{2}/2$. Substituindo esses valores na equação da cônica nas coordenadas X e Y, temos

$$3X^2 - Y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{X^2}{1/3} - Y^2 = 1,$$

que é uma hipérbole centrada na origem, com parâmetros $a^2 = 1/3$, $b^2 = 1$ e $c^2 = 4/3$, vértices $(-\sqrt{3}/3, 0)$ e $(\sqrt{3}/3, 0)$ e focos $(-2\sqrt{3}/3, 0)$ e $(2\sqrt{3}/3, 0)$.

Para fazer o esboço do gráfico da cônica, a interseção da curva com os eixos Ox e Oy pode ajudar. Aqui as interseções são os pontos $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ e $(0, -1)$.



b) Como no ítem anterior, substituindo as equações de rotação e usando que $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ e $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$, o coeficiente do termo misto nas coordenadas X e Y é $3\sin(2\theta) - 4\cos(2\theta)$. Para que esse coeficiente seja nulo, devemos ter $\sin(2\theta)/\cos(2\theta) = 4/3$. A partir de um triângulo de lados $3, 4, 5$, temos $\sin(2\theta) = 4/5$ e $\cos(2\theta) = 3/5$. Das igualdades trigonométricas para arco duplo

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} = \frac{4}{5} \text{ e } \sin^2\theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} = \frac{1}{5},$$

o que nos dá $\cos\theta = 1/\sqrt{5}$ e $\sin\theta = 2/\sqrt{5}$.
Substituindo os valores encontrados na equação da cônica nas coordenadas X e Y, chegamos a

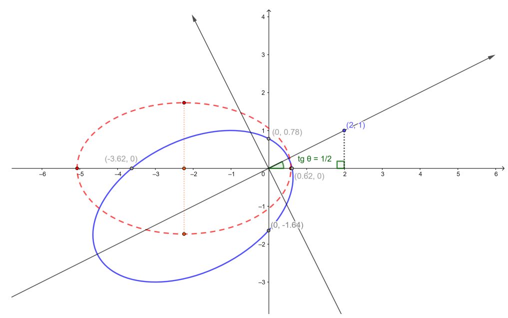
$$3X^2 + 8Y^2 + 6\sqrt{5}X - 9 = 0,$$

que equivale a

$$\frac{(x + \sqrt{5})^2}{8} + \frac{Y^2}{3} = 1.$$

É a equação de uma elipse, centrada em $(-\sqrt{5}, 0)$, com eixo maior paralelo ao eixo Ox, de tamanho $4\sqrt{2}$, e eixo menor de tamanho $2\sqrt{3}$.

Para esboçar a curva, o ângulo de rotação θ pode ser marcado através do valor de sua tangente. Basta observar o triângulo retângulo de lados $1, 2$ e $\sqrt{5}$, correspondente aos valores do seno e do cosseno de θ. As interseções da cônica com os eixos também podem ser indicadas: $(0, \frac{-3-6\sqrt{2}}{7})$, $(0, \frac{-3+6\sqrt{2}}{7})$, $(\frac{-3-3\sqrt{2}}{2}, 0)$ e $(\frac{-3+3\sqrt{2}}{2}, 0)$.



c) Substituindo as equações de rotação na equação da cônica, temos

$$X^2(2\cos^2\theta + \sin(2\theta)) + Y^2(2\sin^2\theta - \sin(2\theta)) - 2XY\cos(2\theta) + X(\sin\theta - \cos\theta) + Y(\sin\theta + \cos\theta) + 1 = 0$$

Para anular o coeficiente do termo misto xy, devemos ter $\cos(2\theta) = 0$. Podemos escolher $\theta = \pi/4$. Aqui, $\sin\theta = \cos\theta = \sqrt{2}/2$. Substituindo esses valores na equação da cônica no sistema XOY,

$$2X^2 + \sqrt{2}Y + 1 = 0,$$

o que implica

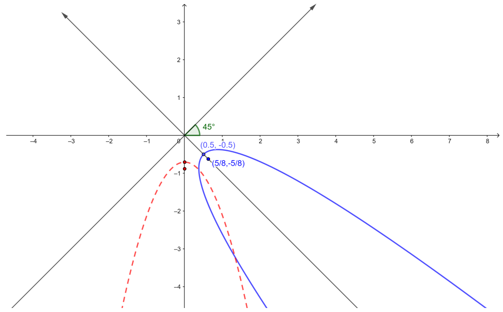
$$Y + \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}X^2.$$

É a equação de uma parábola com concavidade voltada para baixo, vértice $(0, -\sqrt{2}/2)$, foco $(0, -5\sqrt{2}/8)$ e diretriz $Y = -3\sqrt{2}/8$.

Se quisermos marcar o vértice da cônica original, basta substituirmos as coordenadas X e Y do vértice da cônica rotacionada nas equações de rotação:

$$\begin{cases} x = X_V\cos\theta - Y_V\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X_V - Y_V) = \dfrac{1}{2} \\ y = X_V\sin\theta + Y_V\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X_V + Y_V) = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Assim, o vértice da cônica original é o ponto $(1/2, -1/2)$. Da mesma forma, encontramos as coordenadas x e y do foco: $(5/8, -5/8)$. Observe que a distância do vértice ao foco e à diretriz, dada pelo parâmetro p, não muda com a rotação.



Nos próximos três ítens vamos utilizar diretamente a equação que o ângulo θ de rotação deve satisfazer para que o termo misto na equação geral da cônica seja anulado.

d) O ângulo procurado deve satisfazer

$$\frac{\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)} = \frac{A - C}{B} = 0,$$

então podemos escolher $\theta = \pi/4$. Assim, as equações de rotação são

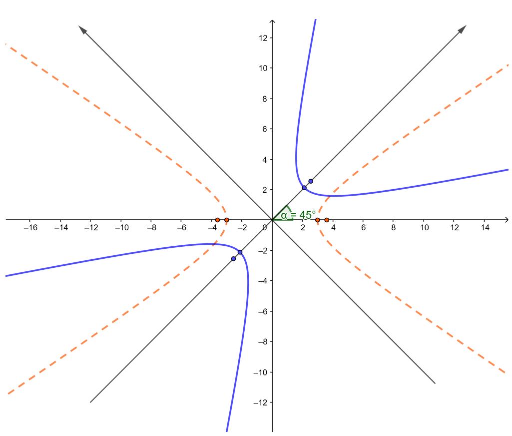
$$\begin{cases} x = X\cos\theta - Y\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}X - \dfrac{\sqrt{2}}{2}Y \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}X + \dfrac{\sqrt{2}}{2}Y. \end{cases}$$

Substituindo na equação da cônica, $4X^2 - 9Y^2 = 36$, isto é,

$$\frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{4} = 1.$$

Temos a equação de uma hipérbole, centrada na origem, com parâmetros $a^2 = 9$, $b^2 = 4$, $c^2 = 13$, vértices $(3, 0)$ e $(-3, 0)$ e focos $(\sqrt{13}, 0)$ e $(-\sqrt{13}, 0)$.

Para encontrar as coordenadas x e y dos vértices e dos focos, basta substituir as coordenadas X e Y desses pontos rotacionados nas equações de rotação, como no ítem anterior. Isto nos dá os vértices $(3\sqrt{2}/2, 3\sqrt{2}/2)$ e $(-3\sqrt{2}/2, -3\sqrt{2}/2)$, e os focos $(\sqrt{26}/2, \sqrt{26}/2)$ e $(-\sqrt{26}/2, -\sqrt{26}/2)$.



e) O ângulo procurado deve satisfazer

$$\frac{\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)} = \frac{A - C}{B} = 0,$$

então podemos escolher $\theta = \pi/4$. Assim, as equações de rotação são

$$\begin{cases} x = X\cos\theta - Y\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}X - \dfrac{\sqrt{2}}{2}Y \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}X + \dfrac{\sqrt{2}}{2}Y. \end{cases}$$

Substituindo na equação da cônica,

$$2X^2 + Y^2 - 2\sqrt{2}X = 0.$$

Completando quadrados, isso equivale a

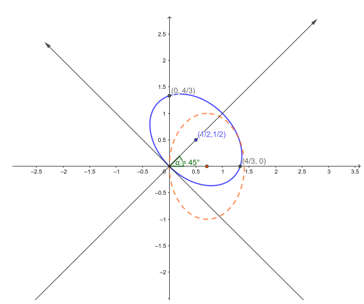
$$\frac{(X - \sqrt{2}/2)^2}{1/2} + Y^2 = 1.$$

Temos a equação de uma elipse, centrada em $(\sqrt{2}/2, 0)$, com eixo maior paralelo ao eixo Oy, de tamanho 2, e eixo menor de tamanho $\sqrt{2}$.

Para esboçar a curva, os pontos de interseção com os eixos Ox e Oy podem ajudar. São eles $(4/3, 0)$ e $(0, 4/3)$. O centro da cônica no sistema xOy pode ser encontrado substituindo as coordenadas X e Y desse ponto rotacionado nas equações de rotação. Isto é

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 0\right) = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 0\right) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Assim, o centro é $(1/2, 1/2)$. Lembre que as medidas dos eixos maior e menor não se alteram com a rotação.



f) O ângulo procurado deve satisfazer

$$\frac{\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)} = \frac{A - C}{B} = -\frac{7}{24}.$$

Esta equação junto com $\sin^2(2\theta) + \cos^2(2\theta) = 1$, nos dá $\sin(2\theta) = 24/25$ e $\cos(2\theta) = -7/25$. Daí,

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} = \frac{9}{25} \text{ e } \sin^2\theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} = \frac{16}{25}.$$

Escolhemos θ tal que $\cos\theta = 3/5$ e $\sin\theta = 4/5$. Assim, as equações de rotação são

$$\begin{cases} x = X\cos\theta - Y\sin\theta = \dfrac{3}{5}X - \dfrac{4}{5}Y \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta = \dfrac{4}{5}X + \dfrac{3}{5}Y. \end{cases}$$

Substituindo na equação da cônica, chegamos a

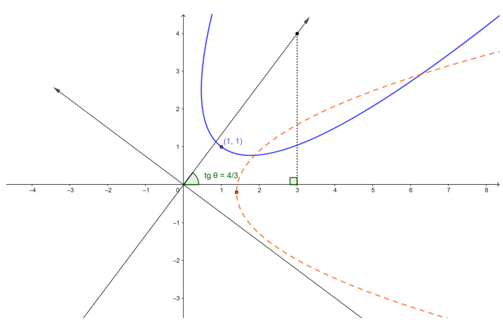
$$25Y^2 - 50X + 10Y + 71 = 0.$$

Completando quadrados, isso equivale a

$$(Y + 1/5)^2 = 2(X - 7/5).$$

Temos a equação de uma parábola, com vértice em $(7/5, -1/5)$, concavidade voltada para direita, parâmetro $p = 1/2$, foco em $(19/10, -1/5)$ e diretriz $X = 9/10$.

Para esboçar a curva podemos marcar o vértice nas coordenadas x e y. Substituindo as coordenadas X e Y do vértice da cônica rotacionada nas equações de rotação, encontramos o vértice da cônica original, $(1, 1)$. Podemos observar também que não há interseção com os eixos Ox e Oy.



3. a) Denotando o ângulo $\theta = 60^o$, temos $\cos\theta = 1/2$ e $\sin\theta = \sqrt{3}/2$. As equações de rotação são dadas por

$$\begin{cases} x = X\cos\theta - Y\sin\theta = \dfrac{X}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}Y \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}X + \dfrac{Y}{2}. \end{cases}$$

A parábola rotacionada tem vértice no ponto $(1, 2)$. Utilizando as equações de rotação, as coordenadas x e y da parábola são

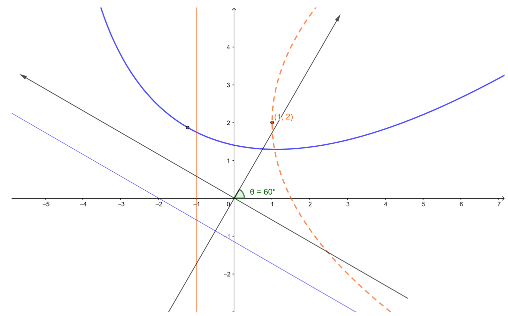
$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}.2 = \dfrac{1}{2} - \sqrt{3} \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1. \end{cases}$$

Nas coordenadas X e Y a diretriz tem equação $X = -1$. As equações de rotação

$$\begin{cases} x = \dfrac{X}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}Y \\ \sqrt{3}y = \dfrac{3}{2}X + \sqrt{3}\dfrac{Y}{2}, \end{cases}$$

implicam $x + \sqrt{3}y = 2X$. Logo, a equação da diretriz nas coordenadas x e y é $d : x + \sqrt{3}y = -2$.

b) Com as informações obtidas no ítem anterior podemos fazer um esboço.



4. a) Denotando o ângulo $\theta = 30^o$, temos $\cos\theta = \sqrt{3}/2$ e $\sin\theta = 1/2$. As equações de rotação são dadas por

$$\begin{cases} x = X\cos\theta - Y\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}X - \dfrac{Y}{2} \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta = \dfrac{X}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}Y. \end{cases}$$

A cônica tem centro com coordenadas X e Y $C = (2, 1)$ e focos com coordenadas X e Y $F_1 = (2, 1 - \sqrt{3})$ e $F_2 = (2, 1 + \sqrt{3})$. Usando as equações de rotação, encontramos as coordenadas x e y desses pontos. O centro tem coordenadas

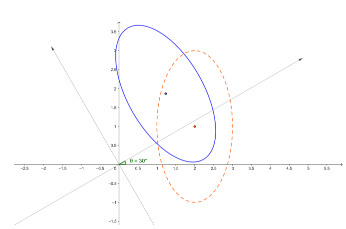
$$\begin{cases} x_C = \dfrac{\sqrt{3}}{2}X - \dfrac{Y}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.2 - \dfrac{1}{2} = \sqrt{3} - \dfrac{1}{2} \\ y_C = \dfrac{X}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}Y = \dfrac{2}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1. \end{cases}$$

Os focos F_1 e F_2 têm coordenadas

$$\begin{cases} x_{F1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}X - \dfrac{Y}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.2 - \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3} - 1}{2} \\ y_{F1} = \dfrac{X}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}Y = \dfrac{2}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 - \sqrt{3}) = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{F2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}X - \dfrac{Y}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.2 - \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3} - 1}{2} \\ y_{F2} = \dfrac{X}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}Y = \dfrac{2}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 - \sqrt{3}) = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}. \end{cases}$$

b) Para fazer o esboço podemos utilizar os pontos obtidos no ítem anterior. Além disso note que a elipse rotacionada tem eixo maior paralelo ao eixo Oy, de tamanho 4 e eixo menor de tamanho 2.



c) Vamos verificar que não há interseção entre a reta e a elipse no sistema XOY. A equação da reta nas coordenadas X e Y é

$$(2\sqrt{3}+1)\left(\frac{\sqrt{3}X}{2}-\frac{Y}{2}\right)+(2-\sqrt{3})\left(\frac{X}{2}+\frac{\sqrt{3}Y}{2}\right)+2=0,$$

que simplificando se torna

$$Y = 2X+1.$$

Substituindo a coordenada Y da reta na equação da cônica no sistema XOY,

$$4(X-2)^2+(2X+1-1)^2=4 \Leftrightarrow 2X^2-4X+3=0,$$

que tem discriminante $\Delta = -24 < 0$. Logo, não há interseção.

5. Como a equação geral da cônica tem o coeficiente do termo misto não nulo, vamos fazer uma rotação para eliminá-lo. O ângulo θ de rotação deve satisfazer

$$\frac{\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)}=\frac{A-C}{B}=0,$$

logo $\theta = \pi/4$ pode ser o ângulo escolhido. As equações de rotação são, portanto,

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y). \end{cases}$$

Substituindo na equação da cônica chegamos a

$$18X^2+8Y^2-72=0 \Leftrightarrow \frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{9}=1.$$

A cônica é uma elipse, centrada na origem, com eixo maior paralelo ao eixo Oy, de tamanho 6 e eixo menor de tamanho 4.

Vamos ver que a reta r intersecta a elipse em dois pontos no sistema XOY. Rotacionando a reta 45^o, obtemos

$$3\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)+\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)+6=0,$$

que simplificando leva a $Y = 2X+3$. Agora, substituindo a equação da reta no sistema XOY na equação da elipse no mesmo sistema, temos

$$9X^2+4(4X^2+12X+9)=36 \Leftrightarrow 25X^2+48X=0,$$

que possui duas soluções. Os dois valores de X que solucionam essa equação são as abscissas dos pontos de interseção. Substituindo esses valores na equação da reta podemos encontrar as respectivas ordenadas desses pontos.

6. a) A equação da cônica tem o coeficiente do termo misto xy diferente de zero. Vamos fazer uma rotação para eliminar esse termo e conseguir identificar a cônica. O ângulo θ de rotação é tal que

$$\frac{\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)}=\frac{A-C}{B}=-\frac{3}{4}.$$

Fazendo um triângulo retângulo de lados $3, 4, 5$, temos $\sin(2\theta) = 4/5$ e $\cos(2\theta) = -3/5$. Das igualdades trigonométricas para arco duplo

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2} = \frac{1}{5} \text{ e } \sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2} = \frac{4}{5}.$$

As equações de rotação são

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{5}}{5}X - \frac{2\sqrt{5}}{5}Y = \frac{\sqrt{5}}{5}(X-2Y) \\ y = \frac{2\sqrt{5}}{5}X + \frac{\sqrt{5}}{5}Y = \frac{\sqrt{5}}{5}(2X+Y). \end{cases}$$

Substituindo essas equações na equação da cônica temos

$$\frac{4}{5}(X-2Y)^2-\frac{4}{5}(X-2Y)(X+2Y)+\frac{1}{5}(2X+Y)^2$$
$$-\frac{18\sqrt{5}}{5}(X-2Y)-\frac{-16\sqrt{5}}{5}(2X+Y)+39=0,$$

que equivale a

$$5Y^2+4\sqrt{5}Y-10\sqrt{5}X+39=0.$$

Completando quadrados, reescrevemos essa equação como

$$\left(Y+\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 2\sqrt{5}\left(X-\frac{7\sqrt{5}}{10}\right),$$

que, é uma parábola com concavidade voltada para a direita, vértice $\left(\frac{7\sqrt{5}}{10}, \frac{-2\sqrt{5}}{5}\right)$, parâmetro $p = \sqrt{5}/2$, foco $F = \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}, \frac{-2\sqrt{5}}{5}\right)$ e diretriz $d : x = \sqrt{5}/5$.

b) Substituindo as coordenadas X e Y do vértice nas equações de rotação, no sistema xOy o vértice tem coordenadas

$$\begin{cases} x_V = \frac{\sqrt{5}}{5}(X-2Y) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{7\sqrt{5}}{10}+4\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{3}{2} \\ y_V = \frac{\sqrt{5}}{5}(2X+Y) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{14\sqrt{5}}{10}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = 1. \end{cases}$$

Da mesma forma, o foco tem coordenadas $(2, 2)$. Para achar a diretriz no sistema xOy note que somando as equações de rotação

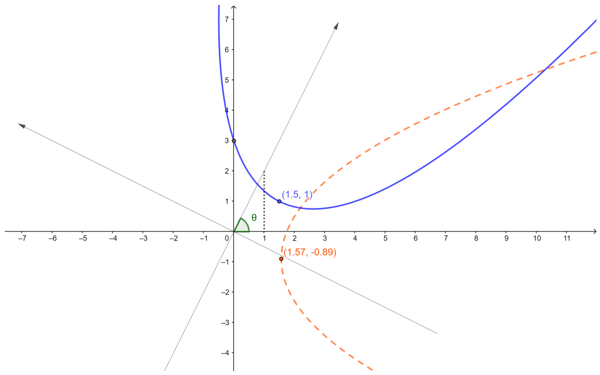
$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{5}}{5}(X-2Y) \\ 2y = \frac{2\sqrt{5}}{5}(2X+Y) \end{cases}$$

temos $x+2y = \sqrt{5}X$. Logo, a diretriz tem equação

$$x = \sqrt{5}\sqrt{5}/5 - 2y = 1-2y$$

nas coordenadas x e y.

c) Podemos utilizar as informações obtidas no ítem anterior. O ângulo θ pode ser marcado fazendo um triângulo retângulo utilizando o valor de sua tangente. Além disso, também é útil marcar a interseção da cônica com os eixos Oy, que acontece nos pontos $(0,3)$ e $(0,13)$.



7. Vamos fazer uma rotação para identificar a cônica. O ângulo θ de rotação para eliminar o termo misto xy satisfaz

$$\frac{\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)} = \frac{A-C}{B} = 0,$$

logo podemos escolher $\theta = \pi/4$. Temos $\sin\theta = \cos\theta = \sqrt{2}/2$. As equações de rotação são

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X-Y) \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X+Y). \end{cases}$$

Substituindo na equação da cônica

$$\frac{1}{2}(X-Y)^2 - 2(X-Y)(X+Y) + \frac{1}{2}(X+Y)^2 + \frac{2\sqrt{2}}{2}(X-Y)$$
$$-\frac{8\sqrt{2}}{2}(X+Y) - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$-2X^2 + 4Y^2 - 3\sqrt{2}X - 5\sqrt{2}Y - 4 = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{(Y-5\sqrt{2}/8)^2}{39/32} - \frac{(X+3\sqrt{2}/4)^2}{39/16} = 1.$$

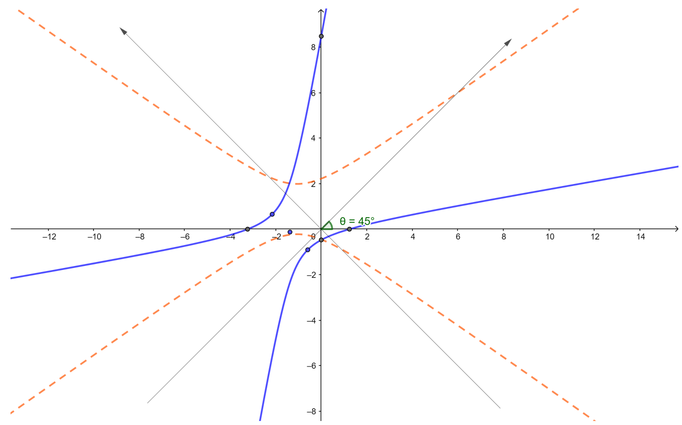
A cônica é uma hipérbole com parâmetros $a^2 = 39/32$, $b^2 = 39/16$ e $c^2 = 117/32$. As coordenadas X e Y do centro são $C = (-3\sqrt{2}/4, 5\sqrt{2}/8)$. As coordenadas X e Y dos vértices são $A_1 = (-3\sqrt{2}/4, 5\sqrt{2}/8 - \sqrt{39/32})$ e $A_2 = (-3\sqrt{2}/4, 5\sqrt{2}/8 + \sqrt{39/32})$.
Usando as equações de rotação, as coordenadas x e y do centro e dos vértices são, respectivamente,

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X_C - Y_C) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{-3\sqrt{2}}{4} - \dfrac{5\sqrt{2}}{8}\right) = -\dfrac{11}{8} \\ y_C = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X_C + Y_C) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{-3\sqrt{2}}{4} + \dfrac{5\sqrt{2}}{8}\right) = -\dfrac{1}{8}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{A1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X_{A1} - Y_{A1}) = \dfrac{-11-\sqrt{39}}{8} \\ y_{A1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X_{A1} + Y_{A1}) = \dfrac{\sqrt{39}-1}{8}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{A2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X_{A2} - Y_{A2}) = \dfrac{-11+\sqrt{39}}{8} \\ y_{A2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X_{A2} + Y_{A2}) = \dfrac{-\sqrt{39}-1}{8}. \end{cases}$$

c) Podemos utilizar as informações obtidas no ítem anterior. Além disso, também é útil marcar a interseção da cônica com os eixos Ox e Oy, que acontece nos pontos $(-1-\sqrt{5},0)$, $(-1+\sqrt{5},0)$, $(0,4-2\sqrt{5})$ e $(0,4+2\sqrt{5})$.



Material elaborado por Lorena Bulhosa