Módulo de Função Quadrática

Resolução de Exercícios

1^a série E.M.

Professores Tiago Miranda e Cleber Assis

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Função Quadrática
Exercícios de Função Quadrática

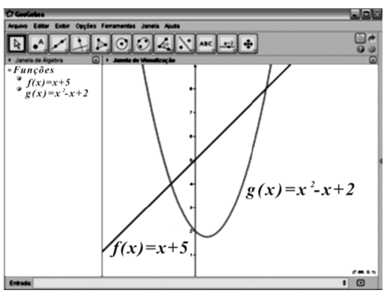
1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Considere a função de domínio real definida por $f(x) = -x^2 + x + 12$. Qual o valor do domínio que produz imagem máxima na função?

Exercício 2. Dentre todos os retângulos de perímetro igual a 12 cm, quais as medidas dos lados daquele que possui a maior área?

Exercício 3. Na ilustração abaixo tem se a representação dos gráficos de duas funções reais a valores reais, definidas por

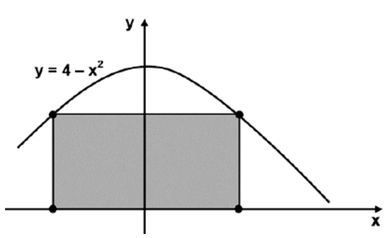
$$g(x) = x^2 - x + 2 \text{ e } f(x) = x + 5.$$



Fonte:http://portaldoprofessor.mec.gov.br/ fichaTecnicaAula.html?aula-53900

Nestas condições, qual a soma das ordenadas dos pontos de interseção dos gráficos que representam as duas funções polinomiais acima ilustradas?

Exercício 4. Um retângulo no plano cartesiano possui dois vértices sobre o eixo das abscissas e outros dois vértices sobre a parábola de equação $y = 4 - x^2$, com $y > 0$. Qual é o perímetro máximo desse retângulo?

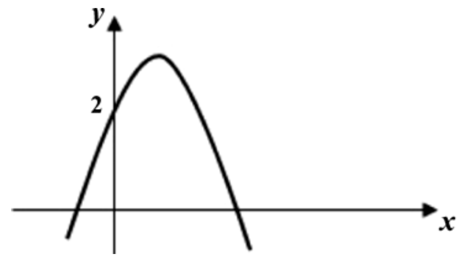


Exercício 5. Se o ponto $(k, 9)$ representa o vértice da parábola determinada pela função $y = 6x^2 + bx + 15$, com $b \in R$, então quais os possíveis valores de b?

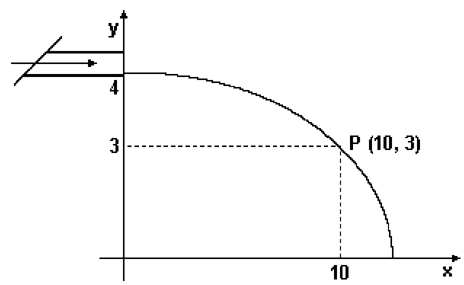
Exercício 6. Considere que o gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ passa pelos pontos $(0, -10)$, $(1, 0)$ e $(4, 6)$ e essa função representa o lucro mensal (em milhões de reais) obtido em função do número x de equipamentos vendidos.
Qual o número de equipamentos vendidos para que o lucro seja o maior possível?

2 Exercícios de Fixação

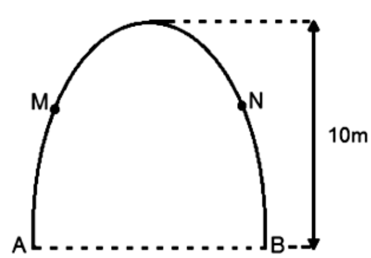
Exercício 7. A parábola no gráfico abaixo tem vértice no ponto $(1, 3)$ e representa a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Sendo assim, qual o valor de $a + b + c$?



Exercício 8. A água que está esguichando de um bocal, mantido horizontalmente a 4 metros acima do solo, descreve uma curva parabólica com vértice no bocal. Se a corrente de água desce 1 metro medido na vertical nos primeiros 10 metros de movimento horizontal, qual a distância horizontal do bocal, em metros, que a corrente de água irá atingir o solo?



Exercício 9. A figura abaixo representa um portal de entrada de uma cidade cuja forma é um arco de parábola. A largura da base (AB) do portal é 8 metros e sua altura é de 10 metros. Qual a largura MN, em metros, de um vitral colocado a $6,4$ metros acima da base?



Exercício 10. A equação da trajetória parabólica do salto de uma pulga é dado por $f(x) = -x^2 + 4x$, na qual x é a distância horizontal percorrida e $f(x)$ a altura relativa a essa distância, todas as medidas em decímetros. Essa pulga salta no ponto de origem do sistema de coordenadas cartesianas.
Qual é, em decímetros, a altura máxima atingida pela pulga?

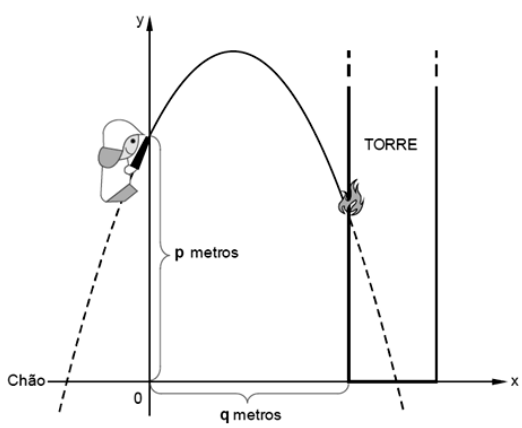
3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 11. Um ônibus de 40 lugares transporta diariamente turistas de um determinado hotel para um passeio turístico pela cidade. Se todos os lugares estão ocupados, o preço de cada passagem é R\$ $20,00$. Caso contrário, para cada lugar vago, será acrescida a importância de R\$ $3,00$ ao preço de cada passagem. Assim, o faturamento da empresa de ônibus, em cada viagem, é dado pela função $f(x) = (40 - x)(20 + x)$, onde x indica o número de lugares vagos ($0 \leq x \leq 40$).

a) Qual o número de lugares vagos no ônibus, em cada viagem, para que a empresa obtenha faturamento máximo?

b) Qual é o faturamento máximo?

Exercício 12. A figura indica um bombeiro lançando um jato de água para apagar o fogo em um ponto de uma torre retilínea e perpendicular ao chão. A trajetória do jato de água é parabólica, e dada pela função $y = -x^2 + 2x + 3$, com x e y em metros.



Sabendo que o ponto de fogo atingido pelo jato de água está a 2 metros do chão, então, qual o valor de $p - q$, em metros?

Exercício 13. Para que valor de a, o conjunto imagem da função quadrática $f(x) = ax^2 - 4x + 6$ é o intervalo $[-6, \infty[$?

Respostas e Soluções.

1. (Adaptado do vestibular do IFPE − 2015)
Observe que $a = -1$, $b = 1$ e $c = 12$ na função quadrática. O enunciado pede o cálculo do

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2\cdot(-1)} = \frac{1}{2}.$$

2. (Adaptado do vestibular do IFPE − 2015)
Como o perímetro, sendo os lados de medidas x e y, temos que $2p = 12$, então

$$\begin{aligned} 2p &= 12 \\ 2x + 2y &= 12 \\ x + y &= 6 \\ y &= 6 - x. \end{aligned}$$

A área A pode ser calculada como o produto dos lados, sendo assim

$$\begin{aligned} A &= x \cdot y \\ A &= x\cdot(6 - x) \\ A &= -x^2 + 6x. \end{aligned}$$

Essa última função possui área máxima para

$$x_V = -\frac{6}{2\cdot(-1)} = 3.$$

Por fim, ficamos $\ell = 3$.

3. (Adaptado do vestibular do UEPA − 2015)
Como as funções se intersectam, temos que nesses pontos

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x + 5 &= x^2 - x + 2 \\ x^2 - 2x - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Essa função possui raízes $x = -1$ e $x = 3$. As respectivas ordenadas resultam $f(-1) = g(-1) = 4$ e $f(3) = g(3) = 8$. Assim, a soma pedida é

$$4 + 8 = 12.$$

4. (Adaptado do vestibular do UFPR − 2015)
Sendo m a coordenada positiva de um dos vértices do retângulo, o seu comprimento é igual a $2m$ e a largura igual a $4 - m^2$. Sendo assim, ficamos com

$$\begin{aligned} 2p &= 2\cdot(2m) + 2\cdot(4 - m^2) \\ 2p &= 4m + 8 - 2m^2 \\ 2p &= -2m^2 + 4m + 8. \end{aligned}$$

Daí, o perímetro máximo é igual à ordenada do vértice

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4^2 - 4\cdot(-2)\cdot 8}{4\cdot(-2)} = -\frac{16+64}{-8} = 10.$$

5. (Adaptado do vestibular do UERN − 2015)
Basta utilizar a fórmula do x_V o que gera

$$\begin{aligned} x_v &= -\frac{b}{2a} \\ k &= -\frac{b}{2\cdot 6} \\ k &= -\frac{b}{12} \end{aligned}$$

e substituir o ponto $(k, 9)$ na lei da função ficando com

$$\begin{aligned} y &= 6x^2 + bx + 15 \\ 9 &= 6\cdot k^2 + b\cdot k + 15 \\ 9 &= 6\cdot\left(-\frac{b}{12}\right)^2 + b\cdot\left(-\frac{b}{12}\right) + 15 \\ 9 - 15 &= 6\cdot\frac{b^2}{144} - \frac{b^2}{12} \\ -6\cdot 144 &= 6b^2 - 12b^2 \\ -6\cdot 144 &= -6b^2 \\ b^2 &= 144 \\ b &= \pm 12. \end{aligned}$$

6. (Adaptado do vestibular do Unievangélica GO − 2015)
Podemos substituir todos os pontos na lei da função e encontrar os valores dos coeficientes ficando com

$$\begin{aligned} -10 &= a\cdot(0)^2 + b\cdot 0 + c \\ c &= -10, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= a\cdot(1)^2 + b\cdot 1 + (-10) \\ a + b &= 10 \\ b &= 10 - a \text{ e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 &= a\cdot(4)^2 + b\cdot 4 + (-10) \\ 6 &= 16a + 4b - 10 \\ 6 &= 16a + 4(10 - a) - 10 \\ 16 &= 16a + 40 - 4a \\ 12a &= -24 \\ a &= -2,\ b = 12 \text{ e } c = -10. \end{aligned}$$

Por fim, o pede-se a abscissa x_V (número de equipamentos para obter o lucro máximo) que é

$$\begin{aligned} x_V &= -\frac{b}{2a} \\ x_V &= -\frac{12}{2\cdot(-2)} \\ x_V &= 3. \end{aligned}$$

7. (Adaptado do vestibular do UNISC RS − 2015)
Podemos substituir o ponto na lei da função e encontrar os valores dos coeficientes ficando com

$$\begin{aligned}3 &= a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c\\ a + b + c &= 3.\end{aligned}$$

8. (Adaptado do vestibular do UNIFOR CE − 2015)
Observe que, como o vértice é no bocal, temos $x_V = 0$ o que gera $b = 0$. Agora, podemos substituir o ponto $(10, 3)$ na lei da função, destacando que $c = 4$, e encontrar o valor de a de modo que

$$\begin{aligned}3 &= a \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 4\\ -1 &= 100a\\ a &= -\frac{1}{100}.\end{aligned}$$

Por fim, as raízes da função $y = -\dfrac{x^2}{100} + 4$ são

$$\begin{aligned}0 &= -\frac{x^2}{100} + 4\\ -4 &= -\frac{x^2}{100}\\ x^2 &= 400.\\ x &= \pm 20.\end{aligned}$$

b: 30

9. (Adaptado do vestibular do ACAFE SC − 2015)
Gab: $4, 8$

10. (Adaptado do vestibular do Unievangélica GO − 2015)
A altura máxima nesse caso é o y_V que pode ser calculcado como

$$\begin{aligned}y_V &= -\frac{\Delta}{4a}\\ y_V &= -\frac{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}{4 \cdot (-1)}\\ y_V &= 4 \text{ dm}.\end{aligned}$$

11. (Adaptado do vestibular do Unievangélica GO − 2015)
A função pode ser reescrita como $f(x) = -x^2 + 20x + 800$.

a) O número de lugares vagos para o faturamento máximo é a abscissa x_V, que pode ser calculado como

$$\begin{aligned}x_V &= -\frac{b}{2a}\\ x_V &= -\frac{20}{2 \cdot (-1)}\\ x_V &= 10.\end{aligned}$$

b) Basta calcularmos $f(10) = (40 - 10)(20 + 10) = 900$ reais.

12. (Adaptado do vestibular do PUCCampinas SP − 2015)
Perceba que $p = 3$ e q pode ser calculado como

$$\begin{aligned}f(x) &= 2\\ -x^2 + 2x + 3 &= 2\\ -x^2 + 2x + 1 &= 0\\ x^2 - 2x - 1 &= 0\\ x^2 - 2x - 1 + 2 &= 0 + 2\\ x^2 - 2x + 1 &= 2\\ (x-1)^2 &= 2\\ (x-1) &= \pm\sqrt{2}\\ x &= 1 \pm \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Como $q > 0$, então $q = 1 + \sqrt{2}$ e

$$\begin{aligned}p - q &= 3 - (1 + \sqrt{2})\\ p - q &= 3 - 1 - \sqrt{2}\\ p - q &= 2 - \sqrt{2}.\end{aligned}$$

13. (Adaptado do vestibular do FGV − 2015)
Do enunciado, encontramos a ordenada $y_V = -6$ e sendo assim

$$\begin{aligned}y_V &= -6\\ -\frac{\Delta}{4a} &= -6\\ \Delta &= 24a\\ 4^2 - 4 \cdot a \cdot 6 &= 24a16 \qquad = 48a\\ a &= \frac{16}{48} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com