Módulo Resolução de Exercícios

Regras de Divisibilidade

6° **ano E.F.**

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

Portal da Matemática
OBMEP

Resolução de Exercícios
Regras de Divisibilidade

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine o conjunto dos divisores naturais de:

a) 36.

b) 48.

c) 90.

Exercício 2. Qual a quantidade de divisores de:

a) 72?

b) 164?

c) 225?

Exercício 3. Quantos divisores tem o produto $A \cdot B$, sendo $A = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$ e $B = 2^3 \cdot 11^2$?

Exercício 4. Qual dos números abaixo é divisível por 18?

a) 325.

b) 336.

c) 354.

d) 368.

e) 396.

Exercício 5. Determine o maior número de 3 algarismos que é divisível por 12.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. Um livro teve suas páginas numeradas apenas com os múltiplos de 4 ou 5. Se a última página recebeu o número 10.000, quantas páginas tem esse livro?

Exercício 7. O número $123X$ é formado por quatro algarismos. Determine o(s) valor(es) de X para que ele seja divisível por 6.

Exercício 8. Faça a fatoração de 320 e determine seu conjunto de divisores.

Exercício 9. Se o número $7X4$ é divisível por 18, então o algarismo X:

a) não existe.

b) vale 4.

c) vale 7.

d) vale 9.

e) vale 0.

Exercício 10. Quantos divisores naturais possui o produto $P = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 17 \cdot 18$?

a) 14.288.

b) 14.388.

c) 14.488.

d) 14.588.

e) 14.688.

Exercício 11. Seja k um número natural diferente de zero. Determine o menor valor de k que torna a expressão $2.400 \cdot k$ um cubo perfeito.

Exercício 12. Se $N = 2^4 \cdot 3^n \cdot 11^3$, determine o valor de n, sabendo que N possui 60 divisores naturais.

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

Exercício 13. Qual o maior inteiro n para que 3^n divida o produto $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$?

a) 2.

b) 7.

c) 8.

d) 9.

e) 20.

Exercício 14. Quantos números entre 500 e 600 têm exatamente 5 divisores naturais?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 15. Sabe-se que o número $2^{13} - 1$ é primo. Seja $n = 2^{17} - 16$, a quantidade de divisores naturais de n é:

a) 5.

b) 6.

c) 7.

d) 10.

e) 12.

Exercício 16. A trigésima primeira edição dos Jogos Olímpicos da Era Moderna foi realizada no Brasil em 2016. A cada quatro anos o evento se repete. Assim, a edição de número 54 será realizada no ano de:

a) 2108.

b) 2112.

c) 2116.

d) 2120.

e) 2124.

Exercício 17. A segunda edição dos Jogos Olímpicos da Era Moderna ocorreu em Paris, na França, em 1900. Tal evento esportivo ocorreu integrado à Exposição Universal de Paris, gigantesca feira mundial de comércio. Por esse motivo, teve uma duração incomum para uma edição dos jogos: mais de 5 meses (iniciou-se em 14 de maio e foi finalizado em 28 de outubro).

Disponível em: http://www.brasil2016.gov.br.

Sabendo que o primeiro dia de disputa esportiva ocorreu numa segunda-feira, o último dia ocorreu em um(a):

a) domingo.

b) segunda-feira.

c) terça-feira.

d) quarta-feira.

e) quinta-feira.

Exercício 18. O número de múltiplos de 12 compreendidos entre 357 e 3578 é igual a:

a) 268.

b) 269.

c) 270.

d) 271.

e) 272.

Exercício 19. O resto da divisão do número 743^{48} por 6 é:

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

Exercício 20. O resto da divisão por 11 do resultado da expressão

$$1211^{20} + 9119^{32} \cdot 343^{26}$$

é:

a) 9.

b) 1.

c) 10.

d) 6.

e) 7.

Exercício 21. Alice nasceu em 4 de agosto de 2016, em uma quinta-feira. Até os 30 anos, quantas vezes Alice fará aniversário em uma quinta-feira?

Respostas e Soluções.

1.

a) $\{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$.

b) $\{1,2,3,4,6,8,12,16,24,48\}$.

c) $\{1,2,3,5,6,9,10,15,18,30,45,90\}$.

2.

a) como $72 = 2^3 \cdot 3^2$, sua quantidade de divisores é $(3+1)\cdot(2+1) = 12$.

b) como $164 = 2^2 \cdot 41$, sua quantidade de divisores é $(2+1)\cdot(1+1) = 6$.

c) como $225 = 3^2 \cdot 5^2$, sua quantidade de divisores é $(2+1)\cdot(2+1) = 9$.

3. Como $A \cdot B = 2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 2^3 \cdot 11^2 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 11^3$, então a quantidade de divisores é $(4+1)\cdot(2+1)\cdot(3+1) = 60$.

4. Um número é divisível por 18 quando é também divisível por 2 e por 9. Das opções, o único par e que possui a soma dos algarismos divisível por 9 é 396. Resposta E.

5. Para que seja divisível por 12, um número deve ser divisível por 3 e 4. Como 1000 é divisível por 4, 996, também é, e como $9+9+6 = 24$, que é divisível por 3, então 996 também é. Assim, o maior número de 3 algarismos que divisível por 12 é 996.

6. As primeiras páginas foram numeradas com 4, 5, 8, 10, 12, 15, 16 e 20, que é o primeiro múltiplo comum a 4 e 5. Assim, a cada 8 páginas, começando da primeira, teremos na oitava um múltiplo comum a 4 e 5. Como $\dfrac{10.000}{20} = 500$, serão 500 sequências de 8 números, ou seja, o total de páginas do livro é $8 \cdot 500 = 4.000$.

7. Para que seja divisível por 6, deve ser divisível por 2 e 3. Para que $123X$ seja divisível por 2, X deve pertencer ao conjunto $\{0,2,4,6,8\}$; para que seja divisível por 3, a soma dos algarismos deve ser divisível por 3, e isso ocorre para X igual a 0, 3, 6 e 9. Temos então que X pode ser 0 ou 6.

8.

$$\begin{array}{r|l} 320 & 2 \\ 160 & 2 \\ 80 & 2 \\ 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \\ \hline & \boxed{2^6 \cdot 5} \end{array}$$

Como $320 = 2^6 \cdot 5$, então os divisores de 320 são do tipo $2^n \cdot 5^p$, com $n \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ e $p \in \{0,1\}$. Por fim, vamos usar uma tabela com todas as combinações para n e p e os respectivos valores de 320.

n	p	divisor
0	0	1
0	1	5
1	0	2
1	1	10
2	0	4
2	1	20
3	0	8
3	1	40
4	0	16
4	1	80
5	0	32
5	1	160
6	0	64
6	1	320

9. (Extraído da ESA/Vídeo Aula) Para que um número seja divisível por 18, ele deve ser divisível por 2 e 9. Como

$7X4$ é par, já é divisível por 2, então basta que $7 + X + 4$ seja divisível por 9, o que ocorre apenas para $X = 7$. Resposta B.

10. (Extraído da Vídeo Aula) Fatorando cada um dos fatores de P e depois os escrevendo como produto de fatores primos, temos:

$$2^{16} \cdot 3^8 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$$

Assim, o número de divisores de P é $17 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 14.688$. Resposta E.

11. Fatorando 2.400, temos:

$$\begin{array}{r|l} 2400 & 2 \\ 1200 & 2 \\ 600 & 2 \\ 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \\ \hline & \boxed{2^5 \cdot 3 \cdot 5^2} \end{array}$$

Para que seja um cubo perfeito, e o menor possível, devemos multiplicar 2.400 por $2 \cdot 3^2 \cdot 5$, ou seja, $k = 90$.

12. Temos $(4 + 1) \cdot (n + 1) \cdot (3 + 1) = 60$, segue que $n = 2$. Resposta B.

13. (Extraído da UFPE/Vídeo Aula) Decompondo cada um dos fatores do produto em primos, vemos que o fator 3 está presente em todos os seis múltiplos de 3. Além disso, o fator 3 está presente "duas vezes"no 9 e no 18. Então teremos o fator 3, $6 + 2 = 8$ vezes. Portanto, o maior valor de n é 8. Resposta C.

14. Para que um número tenha exatamente 5 divisores, ele deve ser quadrado perfeito. Entre 500 e 600, temos $23^2 = 529$ e $24^2 = 576$, mas nenhum dos dois possui exatamente 5 divisores naturais. Portanto, nenhum número entre 500 e 600 possui exatamente 5 divisores naturais.

15. (Extraído da UFMG - adaptada/Vídeo Aula) Temos que:

$$\begin{aligned} n &= 2^{17} - 16 \\ &= 2^{17} - 2^4 \\ &= 2^4(2^{13} - 1). \end{aligned}$$

Como $2^{13} - 1$ é primo, só tem um divisor e, portanto, n tem $(4 + 1) \cdot (1 + 1) = 10$ divisores. Resposta D.

16. (Extraído do Colégio Militar do Rio de Janeiro - 2016) Como 2016 é múltiplo de 4 e o evento ocorre de 4 em 4 anos, então os anos nos quais ocorrem o evento são múltiplos de 4. Serão $54 - 31 = 23$ edições posteriores à edição de 2016 e isso implica que a edição de número 54 ocorrerá no ano de $2016 + 23 \cdot 4 = 2016 + 92 = 2108$. Resposta A.

17. (Extraído do Colégio Militar do Rio de Janeiro - 2016) O total de dias foi $(17 + 30 + 31 + 31 + 30 + 28 = 167)$. Como o resto, na divisão de 167 por 7, é 6, então o último dia foi domingo. Resposta A.

18. (Extraído do Colégio Naval/Vídeo Aula) Como $357 = 29 \cdot 12 + 9$ e $3578 = 298 \cdot 12 + 2$, então o número de múltiplos de 12 entre 357 e 3578 é $298 - 29 = 269$. Resposta B.

19. (Extraído do Colégio Naval/Vídeo Aula) O resto da divisão de 743 por 6 é 5; o resto da divisão de 743^2 por 6 é $5^2 - 24 = 1$ (pois o resto, na divisão por 6, deve ser um número natural de 0 a 5). Como $74348 = (743^2)^{24}$, Então o resto é $1^{24} = 1$. Resposta A.

20. (Extraído do Colégio Naval/Vídeo Aula) Como 9119 é divisível por 11, então $9119^{32} \cdot 343^{26}$ também é. Basta analisarmos a primeira parcela: a divisão de 1211 por 11 deixa resto 1, então 1211^{20} deixa resto $1^{20} = 1$. Resposta B.

21. Para que Alice faça aniversário em uma quinta-feira, é necessário que sua idade, em dias, seja um número divisível por 7. Como 365 dividido por 7 deixa resto 1, seu aniversário de 1 ano, será em uma sexta-feira, o de 2 no sábado e seria sempre assim se não existissem os anos bissextos. Como nestes anos existe um dia a mais, o resto na divisão de 366 por 7 deixa resto 2, ou seja, em 2020, que é bissexto, não será na segunda e sim na terça. Seguindo esta ideia, Alice fará aniversário em uma quinta-feira em 2022, 2033, 2039, 2044, ou seja, 4 vezes até os 30 anos.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com