Módulo de Progressões Geométricas

Soma dos termos da P.G. finita

1^a **série E.M.**

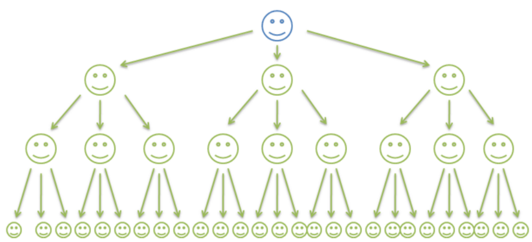
Professores Tiago Miranda e Cleber Assis

Portal da Matemática
OBMEP

Progressões Geométrica
Soma dos termos da P.G. finita

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Um fofoqueiro está espalhando um boato e esolve passá-lo a três novas pessoas, que repetem o processo e repassam a notícia adiante do mesmo modo, sempre a pessoas diferentes em relação à aquelas que já detinham a informação. Assim, ninguém recebeu a fofoca de mais de uma pessoa, conforme ilustra a figura abaixo.



A ilustração anterior expõe o crescimento da quantidade de pessoas sabendo da fofoca até o 4° nível. Quantas pessoas saberão da notícia até que ela chegue ao 9° nível?

Exercício 2. O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

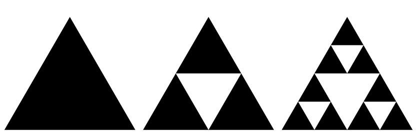
I) comece com um triângulo equilátero (primeira figura abaixo);

II) construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;

III) posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a figura central abaixo;

IV) repita sucessivamente os passos II e III para cada cópia dos triângulos obtidos no passo III.

(Adaptado do ENEM)



Analisando o padrão da representação, pergunta-se:

a) quantos triângulos pretos há no próximo termo da sequência (quarto termo)?

b) quantos triângulos pretos há no quinto termo da sequência?

c) qual a fórmula geral para o cálculo da quantidade n do termo a_n?

d) qual a soma da quantidade de triângulos pretos dos 10 primeiros termos dessa sequência?

Exercício 3. João publicou na Internet um vídeo muito engraçado que fez com sua filha caçula. Ele observou e registrou a quantidade de visualizações do vídeo em cada dia, de acordo com o seguinte quadro.

Dias	Quantidade de visualizações do vídeo em cada dia
1	$7x$
2	$21x$
3	$63x$
...	...

Na tentativa de testar os conhecimentos matemáticos de seu filho mais velho, João o desafiou a descobrir qual era a quantidade x, expressa no quadro, para que a quantidade total de visualizações ao final dos 5 primeiros dias fosse 12705.

a) Sabendo que o filho de João resolveu corretamente o desafio, qual resposta ele deve fornecer ao pai para informar a quantidade exata de visualizações representada pela incógnita x?

b) Nos demais dias, a quantidade de visualizações continuou aumentando, seguindo o mesmo padrão dos primeiros dias. Em um único dia houve exatamente 2066715 visualizações registradas desse vídeo. Que dia foi este?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 4. Qual a quantidade de termos da progressão geométrica

$$1, 3, 9, 27, \ldots, a_n$$

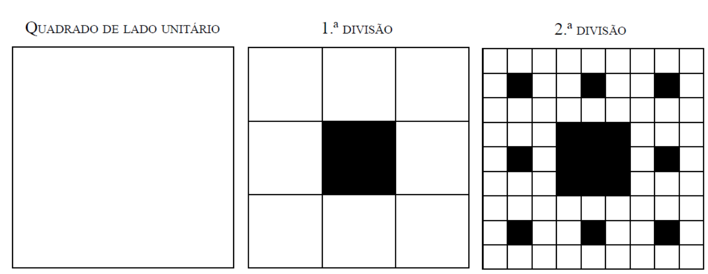
sabendo que a soma desses n termos é igual a 3280?

Exercício 5. Seja (b_1, b_2, b_3, b_4) uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$. Se

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 20,$$

então qual o valor de b_4?

Exercício 6. Divide-se, inicialmente, um quadrado de lado com medida unitária em 9 quadrados iguais, traçando-se dois pares de retas paralelas aos lados. Em seguida, remove-se o quadrado central. Repete-se este processo de divisão, para os quadrados restantes, n vezes.
Observe o processo para as duas primeiras divisões:



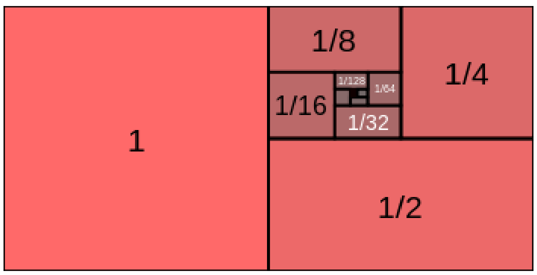
a) Quantos quadradinhos restarão após as n divisões sucessivas do quadrado inicial?

b) Qual a soma das áreas dos quadrados removidos, quando n cresce até o oitava divisão?

Exercício 7. Qual deve ser o valor de n para o qual a soma dos n primeiros termos da Progressão Geométrica $(3, 6, 12, 24, \ldots)$ é um número compreendido entre 50000 e 100000?

Exercício 8. Uma empresa contratou um empregado para trabalhar de segunda a sexta durante duas semanas. O dono da empresa pagou R\$ $1,00$ pelo primeiro dia de trabalho e nos dias seguintes o dobro do que ele recebeu no dia anterior. Quanto o empregado recebeu pelos 10 dias que trabalhou?

Exercício 9. Foi iniciado um processo de divisão de um retângulo de lados medindo 2 cm e 1 cm em vários retângulos menores, conforme a figura abaixo, cujas áreas estão na P.G. decrescente $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$.



Sendo assim, qual a diferença entre a área do retângulo maior e a soma das áreas dos onze primeiros retângulos da sequência exposta acima?

Exercício 10. Para percorrer 1 km, o jovem Zeno adota a estratégia de dividir seu movimento em várias etapas, percorrendo, em cada uma, metade da distância que ainda falta até o ponto de chegada. A tabela mostra a distância percorrida por ele nas primeiras etapas.

Etapa	Distância percorrida (km)
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$
$\vdots$	$\vdots$
n	$\frac{1}{2^n}$

Ao final da etapa n, qual será a distância total percorrida por Zeno?

Exercício 11. Numa plantação de eucaliptos, as árvores são atacadas por uma praga, semana após semana. De acordo com observações feitas, uma árvore adoeceu na primeira semana; outras duas, na segunda semana; mais quatro, na terceira semana e, assim por diante, até que, na décima semana, praticamente toda a plantação ficou doente, exceto sete árvores. Qual a quantidade inicial de eucaliptos nessa plantação?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 12. Uma montadora de automóveis inaugurou um enorme pátio para guardar os carros produzidos e ainda não comercializados. Para transportar os carros da fábrica para esse pátio, contratou uma transportadora, que executou o serviço em cinco dias, tendo sido transportados x carros no primeiro dia e, nos demais uma quantidade 50% superior a cada dia, em relação ao dia anterior.
No pátio, os carros foram armazenados em filas horizontais e paralelas, com o mesmo número y de carros em cada uma. Sabe-se que o total de carros entregues nos dois primeiros dias ocupou exatamente 6 filas, e que, ao serem agregados os carros entregues no terceiro dia, faltariam apenas 24 carros para que fossem formadas exatamente 12 filas.
Considerando as informações apresentadas, estruture e execute resoluções de maneira a

a) determinar o valor de y (número de carros em cada fila);

b) encontrar a quantidade total de carros que foram transportados para o novo pátio.

Exercício 13. A figura a seguir representa um modelo plano do desenvolvimento vertical da raiz de uma planta do mangue. A partir do caule, surgem duas ramificações da raiz e em cada uma delas surgem mais duas ramificações e, assim, sucessivamente. O comprimento vertical de uma ramificação, dado pela distância vertical reta do início ao fim da mesma, é sempre a metade do comprimento da ramificação anterior.

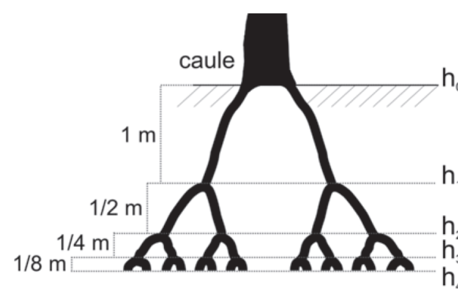


Figura: Modelo de raiz de planta de mangue.

Sabendo que o comprimento vertical da primeira ramificação é de $h_1 = 1$ m, qual o comprimento vertical total da raiz, em metros, até h_{10}?

Exercício 14. Uma tartaruga se desloca em linha reta, sempre no mesmo sentido. Inicialmente, ela percorre 2 metros em 1 minuto e, a cada minuto seguinte, ela percorre $\frac{4}{5}$ da distância percorrida no minuto anterior.

a) Calcule a distância percorrida pela tartaruga após 3 minutos.

b) Determine uma expressão para a distância percorrida pela tartaruga após um número inteiro n de minutos.

c) A tartaruga chega a percorrer 10 metros? Justifique sua resposta.

Respostas e Soluções.

1. Perceba que o total de pessoas em cada nível vai crescendo conforme uma P.G. de razão 3, com $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 9$, $a_4 = 27, \ldots$. Sendo assim, o total de pessoas que saberão da notícia até que ela complete o 9° nível é

$$\begin{aligned} S_9 &= a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \\ &= 1 \cdot \frac{3^9 - 1}{3 - 1} \\ &= \frac{196983 - 1}{2} \\ &= 9841. \end{aligned}$$

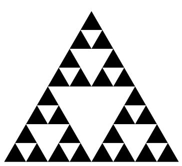
2. Observe que

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 3 \\ a_3 &= 9. \end{aligned}$$

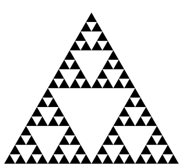
a) Sendo assim

$$a_4 = 27,$$

conforme a figura abaixo



b) Na sequência $a_5 = 81$ (veja a próxima figura)



c) Com o padrão observado, concluímos que $a_n = 3^{n-1}$.

d) Por fim, percebemos que o total de triângulos pretos em cada novo termo vai crescendo conforme uma P.G. de razão 3, com $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 9$, $a_4 = 27$, $a_5 = 81, \ldots$. Sendo assim o total de triângulos pretos até o 10° termo fica

$$\begin{aligned} S_{10} &= a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \\ &= 1 \cdot \frac{3^{10} - 1}{3 - 1} \\ &= \frac{59049 - 1}{2} \\ &= 29524. \end{aligned}$$

3. (Adaptado do vestibular da UEL − 2014)
A sequência exposto é uma P.G. de razão 3.

a) Daí, a soma dos 5 primeiros termos pode ser escrita como

$$\begin{aligned} S_5 &= 7x \cdot \frac{3^5 - 1}{3 - 1} \\ 12705 &= 7x \cdot \frac{243 - 1}{2} \\ x &= \frac{12705}{7 \cdot 121} \\ x &= 15. \end{aligned}$$

b) Agora, João deseja saber se existe n tal que $a_n = 2066715$, e podemos escrever essa igualdade como

$$\begin{aligned} a_n &= 2066715 \\ 7 \cdot x \cdot 3^{n-1} &= 2066715 \\ 7 \cdot 15 \cdot 3^{n-1} &= 2066715 \\ 3^{n-1} &= \frac{2066715}{105} \\ 3^{n-1} &= 19683 \\ 3^{n-1} &= 3^9 \\ n &= 10. \end{aligned}$$

4. A P.G. dada tem razão igual a 3 e a soma dada pode ser escrita como

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 9 + 27 + \ldots + a_n &= 3280 \\ 1 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} &= 3280 \\ \frac{3^n - 1}{2} &= 3280 \\ 3^n - 1 &= 6560 \\ 3^n &= 6561 \\ 3^n &= 3^8 \\ n &= 8. \end{aligned}$$

5. (Adaptado do vestibular da UECE)
Sendo (b_1, b_2, b_3, b_4) uma P.G. de razão $\frac{1}{3}$, então (b_4, b_3, b_2, b_1) é uma P.G. de razão 3 e a soma pode escrita como

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 + b_4 &= 20 \\ b_4 + b_3 + b_2 + b_1 &= 20 \\ b_4 \cdot \frac{3^4 - 1}{3 - 1} &= 20 \\ b_4 \cdot \frac{81 - 1}{2} &= 20 \\ b_4 \cdot \frac{80}{2} &= 20 \\ b_4 \cdot 40 &= 20 \\ b_4 = \frac{20}{40} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

6. (Adaptado do vestibular da UNESP)
Podemos perceber para cada quadrado dividido por paralelas, formam-se nove quadradinhos, dos quais um será excluído, formando assim a sequência

$$(8, 64, 256, \ldots).$$

a) Daí, o termo geral dessa P.G. de razão 8 será

$$a_n = 8 \cdot 8^{n-1} = 8^n.$$

b) A sequência b_n de evolução das área divide cada quadrado em nove, então, cada a_n fica dividido por $\left(\frac{1}{9}\right)^n$, o que nos permite escrever a P.G. de razão $\frac{8}{9}$ abaixo

$$\left(1; 8 \cdot \frac{1}{9}; 64 \cdot \frac{1}{81}; \ldots\right).$$

$b_8 = a_8 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^7$ e, além disso,

$$\begin{aligned} b_8 &= a_1 \cdot q^7 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^7 \\ b_8 &= 1 \cdot q^7 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^7 \\ b_8 &= \frac{8^7}{9^7}. \end{aligned}$$

7. (Adaptado do vestibular da UFES)
A P.G. dada tem razão igual a 2 e a soma dada pode ser escrita como

$$\begin{aligned} 50000 < 3 + 6 + 12 + 24 + \ldots + a_n &< 100000 \\ 50000 < 3 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} &< 100000 \\ 50000 < 3 \cdot (2^n - 1) &< 100000 \\ 50000 < 3 \cdot 2^n - 3 &< 100000 \\ 50003 < 3 \cdot 2^n &< 100003 \\ \frac{50003}{3} < \cdot 2^n &< \frac{100003}{3} \\ 16667,\overline{6} < \cdot 2^n &< 33334,\overline{3} \\ 2^{14} < \cdot 2^n &< 2^{16} \\ n &= 15. \end{aligned}$$

8. (Adaptado do vestibular da UFAM − 2015)
A P.G. dada tem razão igual a 2 e a soma dada pode ser escrita como

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} &= S_{10} \\ 1 + 2 + \ldots + 512 &= S_{10} \\ 1 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} &= S_{10} \\ S_{10} = 1024 - 1 &= 1023. \end{aligned}$$

9. A área do retângulo é $1 \times 2 = 2$ cm^2. Os onze primeiros retângulos da sequência são

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^{10}}\right)$$

cuja soma é a mesma da sequência

$$\left(\frac{1}{2^{10}}, \frac{1}{2^9}, \frac{1}{2^8}, \frac{1}{2^7}, \ldots, 1\right)$$

que é uma P.G. crescente de razão 2 com soma

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \\ S_{11} &= \frac{1}{2^{10}} \cdot \frac{2^{11} - 1}{2 - 1} \\ &= \frac{1}{1024} \cdot \frac{2048 - 1}{1} \\ &= \frac{2047}{1024} \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Por fim, a diferença pedida é

$$2 - \frac{2047}{1024} = \frac{2048 - 2047}{1024} = \frac{1}{1024}.$$

10. (Adaptado do vestibular do IBMEC (SP) − 2015)
A distância total será o somatório dos termos da P.G. $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}\right)$, de razão $\frac{1}{2}$, que é o mesmo somatório que a P.G. $\left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right)$, de razão 2, cuja resultado é

$$S_n = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = \frac{2^n - 1}{2^n}.$$

11. (Adaptado do vestibular da UFES)
A P.G. dada tem razão igual a 2 e a soma dada pode ser escrita como

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} &= S_{10} \\ 1 + 2 + \ldots + 512 &= S_{10} \\ 1 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} &= S_{10} \\ S_{10} = 1024 - 1 &= 1023, \end{aligned}$$

e a quantidade inicial total era $1023 + 7 = 1030$.

12. (Adaptado do vestibular da UFU (MG)− 2013)
Temos que o total de carros transportados em cada um dos 5 dias foi $(x; 1,5x; 1,5^2x; 1,5^3x; 1,5^4x)$, uma P.G. de razão $1,5$. Podemos escrever também que

$$\begin{cases} x + 1,5x = 6y \\ x + 1,5x + 1,5x^2 + 24 = 12y, \end{cases}$$

por substituição, esse sistema poderá ser resolvido como se segue

$$\begin{aligned} x + 1,5x + 1,5x^2 + 24 &= 2 \cdot (x + 1,5x) \\ 2,5x + 2,25x + 24 &= 5x \\ 0,25x &= 24 \\ x &= 96. \end{aligned}$$

a) E para calcularmos o valor de y, podemos fazer

$$\begin{aligned} x + 1,5x &= 6y \\ 6y &= 2,5 \cdot 96 \\ y &= \frac{2,5 \cdot 96}{6} = 2,5 \cdot 16 = 40. \end{aligned}$$

b) Por fim, a soma da P.G. (soma dos carros entregues) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
S_5 &= x \cdot \frac{1,5^5 - 1}{1,5 - 1} \\
&= 96 \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^5 - 1}{0,5} \\
&= 96 \left(\frac{243}{32} - 1\right) \cdot \frac{2}{1} \\
&= 2 \cdot 96 \left(\frac{243 - 32}{32}\right) \\
&= 2 \cdot 96 \left(\frac{211}{32}\right) \\
&= 2 \cdot 3 \cdot 211 \\
&= 1266.
\end{aligned}$$

13. (Adaptado do vestibular da UEL (PR))
Temos uma P.G. de razão 2 com soma:

$$\begin{aligned}
S_{10} &= \frac{1}{2^9} \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} \\
&= \frac{1}{2^9} \cdot \left(2^{10} - 1\right) \\
&= \frac{1023}{512}.
\end{aligned}$$

14. (Adaptado do vestibular da UFES)
A lógica do enunciado nos permite concluir que a distância total após cada salto forma uma P.G. de $a_1 = 2$ e $q = \frac{4}{5}$ do modo que:

a)

$$\begin{aligned}
S_3 &= 2 \cdot \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^3 - 1}{\frac{4}{5} - 1} \\
&= 2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^3}{1 - \frac{4}{5}} \\
&= 2 \cdot \frac{1 - \frac{64}{125}}{1 - \frac{4}{5}} \\
&= 2 \cdot \frac{\frac{125 - 64}{125}}{\frac{5 - 4}{5}} \\
&= 2 \cdot \frac{61}{125} \cdot \frac{5}{1} \\
&= 2 \cdot \frac{61}{125} \cdot \frac{5}{1} = \frac{122}{25} \text{ metros.}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
S_n &= 2 \cdot \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^n - 1}{\frac{4}{5} - 1} \\
&= 2 \cdot \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right) \cdot \frac{5}{1} \\
&= 10 \cdot \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right).
\end{aligned}$$

c) Perceba que

$$\begin{aligned}
S_n &= 2 \cdot \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^n - 1}{\frac{4}{5} - 1} \\
&= 2 \cdot \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right) \cdot \frac{5}{1} \\
S_n &= 10 \cdot \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right) < 10.
\end{aligned}$$

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com