Módulo de Fração como Porcentagem e Probabilidade

Probabilidade da União e da Interseção.

6° **ano E.F.**

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Fração como Porcentagem e Probabilidade
Probabilidade da União e da Interseção.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. No brinquedo ilustrado na figura 1, bolinhas são colocadas nas entradas A, B ou C e movem-se sempre para baixo, terminando nas caixas 1, 2 ou 3.

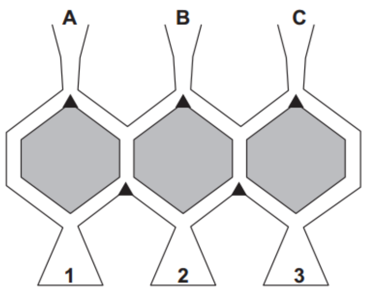


Figura 1

Ao atingir um dos pontos marcados com ▲, as bolinhas têm chances iguais de ir para cada um dois lados.

a) Se uma bolinha for colocada em C, em quais caixas ela pode parar? E se ela for colocada em B?

b) Se uma bolinha for colocada em A, qual é a probabilidade de que ela vá parar na caixa 2? E se ela for depositada em B, qual é essa probabilidade?

Exercício 2. Em um jogo, Pedro lança uma moeda para decidir quantas casas avançar. Quando sai cara, ele avança uma; quando sai coroa, ele avança duas. O jogo acaba quando Pedro alcança ou ultrapassa a última casa. Faltam três casas para Pedro terminar o jogo. Qual a probabilidade de que ele tire coroa em sua última jogada?

Exercício 3. Em dois lançamentos sucessivos de um mesmo dado, qual a probabilidade de sair um número ímpar e depois um número par?

Exercício 4. Numa urna há 20 bolinhas numeradas de 1 a 20. Retiram-se duas bolinhas dessa urna, uma após a outra, sem reposição. Qual a probabilidade de ter saído um número divisível por 3 e na sequência um múltiplo de 7?

Exercício 5. Numa urna há 25 bolinhas numeradas de 1 a 25. Retiram-se duas bolinhas dessa urna, uma após a outra, sem reposição. Qual a probabilidade de ter saído um número divisível por 3 e na sequência um múltiplo de 7?

Exercício 6. Em uma caixa estão acondicionados uma dúzia e meia de ovos. Sabe-se, porém, que três deles estão impróprios para o consumo. Se forem escolhidos dois ovos ao acaso, qual a probabilidade de ambos estarem estragados?
a) $2/153$ b) $1/9$ c) $1/51$ d) $1/3$ e) $4/3$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 7. Dois eventos A e B de um espaço amostral são independentes. A probabilidade do evento A é $P(A) = 0,4$ e a probabilidade da união de A com B é $P(A \cup B) = 0,8$. Pode-se concluir que a probabilidade do evento B é:
a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{2}$

Exercício 8. Em uma das provas de uma gincana, cada um dos 4 membros de cada equipe deve retirar, ao acaso, uma bola de uma urna contendo bolas numeradas de 1 a 10, que deve ser reposta após cada retirada. A pontuação de uma equipe nessa prova é igual ao número de bolas com números pares sorteadas pelos seus membros. Assim, a probabilidade de uma equipe conseguir pelo menos um ponto é
a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{7}{8}$ c) $\frac{9}{10}$ d) $\frac{11}{12}$ e) $\frac{15}{16}$

Exercício 9. De um baralho de 28 cartas, sete de cada naipe, Luís recebe cinco cartas: duas de ouros, uma de espadas, uma de copas e uma de paus. Ele mantém consigo as duas cartas de ouros e troca as demais por três cartas escolhidas ao acaso dentre as 23 cartas que tinham ficado no baralho. A probabilidade de, ao final, Luís conseguir cinco cartas de ouros é:
a) $\frac{1}{130}$ b) $\frac{1}{420}$ c) $\frac{10}{1771}$ d) $\frac{25}{7117}$ e) $\frac{52}{8117}$

Exercício 10. Em uma lata há 6 balas de leite com recheio de chocolate, 9 balas de chocolate com recheio de menta, 5 balas de chocolate com recheio de café e 8 balas de café com recheio de menta. Sabendo que todas as balas têm exatamente o mesmo formato, a probabilidade de uma pessoa retirar aleatoriamente uma bala dessa lata e ela ser de chocolate ou ter chocolate no recheio é
a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{4}{7}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{5}{7}$ e) $\frac{3}{4}$

Exercício 11. A Boutique TT tem em estoque 400 camisas da marca X das quais 50 apresentam defeitos e 200 da marca Y das quais 15 são defeituosas. Se um cliente comprou (*aleatoriamente*) uma camisa nesta loja, a probabilidade de ela ser da marca Y ou defeituosa é:
a) $0,025$ b) $0,358$ c) $0,417$ d) $0,500$ e) $0,592$

Exercício 12. Do total de pacientes atendidos em um dia no pronto socorro de um hospital, 30% são obesos. Entre estes obesos, a porcentagem de pacientes com hipertensão (pressão alta) é de 50%; já entre os não obesos, a porcentagem é de 20%. Escolhendo-se ao acaso um dos pacientes atendidos neste dia pelo pronto socorro, a probabilidade de que ele seja obeso ou tenha hipertensão é de
a) 44% b) 29% c) 32% d) 37% e) 41%

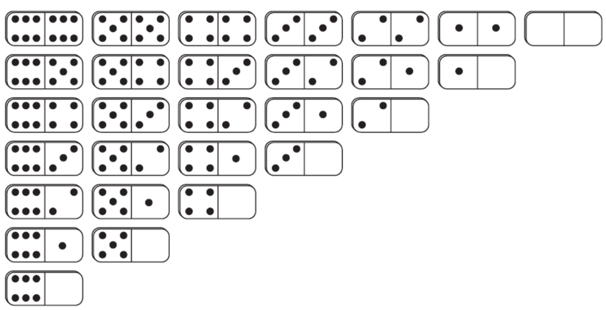
Exercício 13. Um grupo de 8 pessoas deverá ser disposto, aleatoriamente, em duas equipes de 4 pessoas. Sabendo-se que João e José fazem parte deste grupo, qual a probabilidade de que eles fiquem na mesma equipe?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

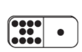
Exercício 14. João comprou uma caixa fechada com 30 pilhas de mesmo tipo, sendo que 6 delas estavam defeituosas. Tirando-se 3 dessas pilhas, uma após a outra, sem reposição, qual é a probabilidade de que pelo menos 2 delas estejam sem defeito?

a) $\dfrac{190}{203}$ b) $\dfrac{184}{203}$ c) $\dfrac{92}{45}$ d) $\dfrac{90}{140}$ e) $\dfrac{85}{140}$

Exercício 15. Cada uma das 28 peças do jogo de dominó convencional, ilustradas abaixo, contêm dois números, de zero a seis, indicados por pequenos círculos ou, no caso do zero, por sua ausência.



Admita um novo tipo de dominó, semelhante ao convencional, no qual os dois números de cada peça variem de zero a dez. Observe o desenho de uma dessas peças:



Considere que uma peça seja retirada ao acaso do novo dominó. Calcule a probabilidade de essa peça apresentar um número seis ou um número nove.

Exercício 16. Um professor de matemática entrega aos seus alunos uma lista contendo 10 problemas e avisa que 5 deles serão escolhidos ao acaso para compor a prova final. Se um aluno conseguiu resolver, corretamente, apenas 7 dos 10 problemas, a probabilidade de que ele acerte todos os problemas da prova é

a) $\dfrac{7}{84}$ b) $\dfrac{21}{84}$ c) $\dfrac{59}{84}$ d) $\dfrac{77}{84}$ e) 1

Exercício 17. Uma equipe de futebol joga sempre com três jogadores no meio de campo, sem posições e atribuições definidas. Como os sete meios-de-campo do elenco jogam com a mesma eficiência, o treinador escala esse setor do time através de sorteio. Nessas condições, qual é a probabilidade do meio-campista mais jovem do elenco jogar a final do campeonato?

a) $\dfrac{5}{35}$ b) $\dfrac{7}{35}$ c) $\dfrac{15}{35}$ d) $\dfrac{20}{35}$ e) $\dfrac{21}{35}$

Exercício 18. Uma rifa foi organizada entre os 30 alunos da turma do Pedro. Para tal, 30 bolinhas numeradas de 1 a 30 foram colocadas em uma urna. Uma delas foi, então, retirada da urna. No entanto, a bola caiu no chão e se perdeu e uma segunda bola teve que ser sorteada entre as 29 restantes. Qual a probabilidade de que o número de Pedro tenha sido o sorteado desta segunda vez?

a) $\dfrac{1}{29}$ b) $\dfrac{1}{30}$ c) $\dfrac{1}{31}$ d) $\dfrac{1}{60}$ e) $\dfrac{1}{61}$

Exercício 19. As esferas metálicas M, N, P e Q ilustradas a seguir são idênticas, mas possuem temperaturas diferentes.

Duas dessas esferas serão escolhidas ao acaso e colocadas em contato até que o equilíbrio térmico[1] seja atingido. A probabilidade de que a temperatura no equilíbrio não seja negativa é

a) $\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{2}{3}$ d) $\dfrac{3}{4}$ e) $\dfrac{5}{6}$

[1] O equilíbrio térmico é obtido quando dois objetos, após interação, atingem o mesma temperatura, essa é obtida pela média aritmética entre as temperaturas iniciais dos objetos.

Respostas e Soluções.

1. (Adaptado da OBMEP)

a) Uma bolinha colocada em C só poderá parar nas caixas 2 ou 3; se colocada em B, ela poderá parar em qualquer das caixas.

b) Se ela parte de C, para chegar à caixa 2 ela deve ir para a esquerda tanto na primeira como na segunda bifurcação. Como a bolinha tem chances iguais de ir para a direita ou para a esquerda em cada bifurcação, a probabilidade dela chegar à caixa 2 é $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$ ou 25%.
Se a bolinha for depositada em B, pelo mesmo raciocínio, ela poderá chegar à caixa 2 por dois caminhos diferentes: direita, esquerda ou esquerda, direita; ambos ocorrem com probabilidade $\dfrac{1}{4}$. Como estes eventos são disjuntos, a probabilidade de um deles ocorrer é a soma das probabilidades de cada evento individual. Logo a probabilidade da bolinha sair de B e chegar à caixa 2 é $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$ ou 50%.

2. (Adaptado da OBMEP)
Pedro pode terminar o jogo de cinco maneiras, a saber:

i) (cara, cara, cara) cuja probabilidade será igual a

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8};$$

ii) (cara, cara, coroa) cuja probabilidade será igual a

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8};$$

iii) (cara, coroa) cuja probabilidade será igual a

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4};$$

iv) (coroa, cara) cuja probabilidade será igual a

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}; \text{ e}$$

v) (coroa, coroa) cuja probabilidade será igual a

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Apenas os itens ii, iii e v terminam em **coroa**. Como as alternativas são mutuamente exclusivas, devemos somá-las para obter a probabilidade desejada que é igual

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

3. Como se tratam de eventos independentes, e tanto a probabilidade de sair um número ímpar quanto um par é $\dfrac{1}{2}$, a probabilidade procurada é $P = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

4. Esse é um exemplo da probabilidade da interseção. Importante destacar que após a primeira retirada a bolinha não é devolvida na urna. De início, a probabilidade de retirarmos um número divisível por 3 é de $\dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10}$. Na sequência, a probabilidade de tirarmos um múltiplo de 7 é de $\dfrac{2}{19}$. Por fim, ficamos com

$$P = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{19} = \frac{6}{190} = \frac{3}{95}.$$

5. Esse é um exemplo da probabilidade da interseção e da união. Importante destacar que após a primeira retirada a bolinha não é devolvida na urna e que de 1 até 25 há um número que é divisível por 3 e múltiplo de 7, o 21. Vamos separar em dois casos, a saber:

i) Se o 21 sair não primeira bolinha; e

ii) Se o 21 não sair não primeira bolinha.

Para o primeiro, a probabilidade de o 21 sair é de $\dfrac{1}{25}$. Agora restam 24 bolinhas e apenas 2 múltiplos de sete, então a probabilidade será igual a $\dfrac{2}{24} = \dfrac{1}{12}$. Portanto, ficamos com

$$P_1 = \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{300}.$$

Para o segundo, a probabilidade de termos um múltiplo de 3, **SEM** ser o 21 a sair, é de $\dfrac{7}{25}$. Agora restam 24 bolinhas e apenas 3 múltiplos de sete (um a mais pois o vinte e um virou uma opção), então a probabilidade será igual a $\dfrac{3}{24} = \dfrac{1}{8}$. Daí, ficamos com

$$P_2 = \frac{7}{25} \cdot \frac{1}{8} = \frac{7}{200}.$$

Agora, chegamos na união, pois a existência de dois casos aumenta a nossa probabilidade de vitória, ou seja, devemos somá-los. Por fim, teremos

$$P_1 + P_2 = \frac{1}{300} + \frac{7}{200} = \frac{23}{600}.$$

6. (Extraído do vestibular da UNEMAT(MT) − 2014)
Em uma dúzia e meia temos 18 ovos. Para o primeiro ovo estragado temos a probabilidade de $\frac{3}{18}$, para o segundo ficamos com a probabilidade de $\frac{2}{17}$. Para a sucessão dos eventos ficamos com $\frac{3}{18} \cdot \frac{2}{17} = \frac{1}{51}$. A resposta está na letra **C**.

7. (Extraído do vestibular da FGV − 2014)
Se os eventos são independentes, então $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Substituindo os valores do enunciado ficaremos com

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \\ 0,8 &= 0,4 + P(B) - 0,4 \cdot P(B) \\ 0,4 &= 0,6P(B) \\ P(B) &= \frac{4}{10} \cdot \frac{10}{6} \\ P(B) &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

A resposta está na letra **D**.

8. (Extraído do vestibular da MACK(SP) − 2015)
A probabilidade de fazer ao menos um ponto será a soma das probabilidades de tirar exatamente uma bola par, tirar exatamente duas, tirar exatamente três e por fim, em todas as retiradas ter bolas com número par. A conta pode ser facilitada observando o complementar desse conjunto, ou seja, observar que a equipe só não marca ponto sorteando sempre bolas com números ímpares, e isso pode ser obtido com a probabilidade igual a

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

e como queremos o complementar disso fazemos

$$1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

A resposta está na letra **E**.

9. (Extraído do vestibular da FUVEST(SP) − 2015)
Inicialmente eram 28 cartas, com 7 de ouros. Para a mão de Luís foram 5 cartas, sendo 2 de ouros. No baralho ficaram 23 cartas, 5 de ouros. A probabilidade pedica fica então igual a

$$\frac{5}{23} \cdot \frac{4}{22} \cdot \frac{3}{21} = \frac{10}{1771}.$$

A resposta está na letra **C**.

10. (Extraído do vestibular da FCI(SP) − 2015)
A bala ser de chocolate tem probabilidade de $\frac{9+5}{28}$ e a bala ter recheio de chocolate tem probabilidade igual a $\frac{6}{28}$. A probabilidade pedida será dada pela soma desses números $\frac{14}{28} + \frac{6}{28} = \frac{20}{28} = \frac{5}{7}$.

11. (Extraído do vestibular da UFGD (MS) − 2014)
A probabilidade de ser da marca Y é $\frac{200}{600}$, de ser defeituosa é de $\frac{15+50}{600}$ e de ser um camisa Y e defeituosa é de $\frac{15}{600}$. Assim, sendo D o conjunto das camisas defeituosas, a probabilidade pedida pode ser calcula usando a fórmula $P(Y \bigcup D) = P(Y) + P(D) - P(Y \cap D)$, que resulta em $\frac{200}{600} + \frac{65}{600} - \frac{15}{600} = P(55) = \frac{250}{600} = 0,41\overline{6}$, cuja aproximação está na letra **C**.

12. (Extraído do vestibular da UMSCS(SP) − 2014)
A probabilidade dos pacientes obesos é de $\frac{30}{100}$, dos pacientes obesos hipertensos é de $\frac{50}{100} \cdot \frac{30}{100} = \frac{15}{100}$ e dos pacientes hipertensos e não obesos é de $\frac{20}{100} \cdot \frac{70}{100} = \frac{14}{100}$. A probabilidade pedida será igual a soma das probabilidades dos pacientes obesos com os hipertensos não obesos (visto que os pacientes obesos e hipertensos já estão garantidos no primeiro conjunto) e ficará igual a $\frac{30}{100} + \frac{14}{100} = \frac{44}{100} = 44\%$. A resposta está na letra **A**.

13. (Adaptado do vestibular da UNIOESTE(PR) − 2013)
Um dos conjuntos deverá conter o João e haverá então 3 vagas para José ocupar. Como existem 7 pessoas restantes, a probabilidade para José ficar no mesmo grupo que João é igual a $\frac{3}{7} = 0,\overline{428571} \cong 42,86\%$.

14. (Extraído do vestibular da USP − 2014)
Calculemos a probabilidade de pelo menos duas terem defeito. Podemos ter a primeira boa e as demais com defeito, a segundo boa e as demais com defeito, a última boa e as demais com defeito, ou todas com defeito. A probabilidade para isso será igual a

$$\begin{aligned} \frac{24}{30} \cdot \frac{6}{29} \cdot \frac{5}{28} + \frac{6}{30} \cdot \frac{24}{29} \cdot \frac{5}{28} + \frac{6}{30} \cdot \frac{5}{29} \cdot \frac{24}{28} + \frac{6}{30} \cdot \frac{5}{29} \cdot \frac{4}{28} &= \\ 3 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 24}{30 \cdot 29 \cdot 28} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{30 \cdot 29 \cdot 28} &= \\ \frac{3 \cdot 6}{29 \cdot 7} + \frac{1}{29 \cdot 7} &= \\ &= \frac{19}{203}. \end{aligned}$$

E como queremos o complementar dessa probabilidade, ficaremos com $1 - \dfrac{19}{203} = \dfrac{184}{203}$. A resposta está na letra **B**.

15. (Extraído do vestibular da UERJ $-$ 2015)
Para descobrirmos o total de peças do novo dominó, observe que para o número zero há 11 peças, sendo uma parceria com como número e a sua bucha, para o número um temos 11 também, só que uma já foi contata junto com o zero, então ficaremos com 10 novas peças, para o número dois há 11 peças, mas já contamos duas (uma com o zero e outra com o um), então ficaremos com 9. Agora, sigamos esse método até chegarmos ao número dez, que terá apenas uma peça sem ter sido contada com as anteriores (a bucha). Sendo assim, o novo dominó terá

$$11 + 10 + 9 + \cdots + 2 + 1 = \frac{(1+11)\cdot 11}{2} = 66 \text{ peças.}$$

Há 11 peças com seis círculos em ao menos uma de suas metades, 11 peças com nove círculos em ao menos uma de suas metades e 1 peça na qual tem seis círculos em uma metade e nove na outra. A probabilidade pedida será igual a $\dfrac{11}{66} + \dfrac{11}{66} - \dfrac{1}{66} = \dfrac{21}{66} = \dfrac{7}{22}$.

16. (Extraído do vestibular do MACK(SP) $-$ 2012)
A probabilidade das questões que ele sabe resolver aparecerem na prova é igual a $\dfrac{7}{10} \cdot \dfrac{6}{9} \cdot \dfrac{5}{8} \cdot \dfrac{4}{7} \cdot \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{12} = \dfrac{7}{84}$. A repsosta está na letra **A**.

17. (Extraído do vestibular da UNCISAL(AL) $-$ 2015)
A forma mais prática para resolver este exercício é calculando a probabilidade complementar. A probabilidade do mais novo não jogar é igual a $\dfrac{6}{7} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{4}{7}$. Sendo assim, a probabilidade dele jogar é igual a $1 - \dfrac{4}{7} = \dfrac{3}{7} = \dfrac{15}{35}$. A resposta está na letra **C**.

18. (Extraído da OBM)
Inicialmente, observe que todos os alunos têm a mesma probabilidade de serem sorteados. Como o ocorrido temos duas situações, a saber:

i) a probabilidade do número de Pedro ter se perdido é igual a $\dfrac{1}{30}$ e, caso isso tenha acontecido, a probabilidade dele ganhar é igual a 0; e

ii) a probabilidade do número de Pedro NÃO ter se perdido é igual a $\dfrac{29}{30}$ e assim a probabilidade dele ganhar é igual a $\dfrac{1}{29}$.

Por fim, ficamos a probabilidade da união desses casos

$$\frac{1}{30} \cdot 0 + \frac{29}{30} \cdot \frac{1}{29} = \frac{1}{30}.$$

A resposta está na letra **B**.

19. (Extraído do vestibular da FM Petrópolis(RJ) $-$ 2015)
Para se ter equilíbrio térmico não negativo devemos evitar os contatos das esferas M e Q ou Q e M. A probabilidade desses contatos é igual a

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Queremos o complementar dessa probabilidade, ou seja, $1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$. A resposta está na letra **E**.

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com