Módulo Miscelânea

Exercícios Variados.

8° **ano/E.F.**

Miscelânea.
Exercícios Variados.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Um número par tem 10 algarismos e a soma desses algarismos é 89. Qual é o algarismo das unidades desse número?

a) 0.

b) 2.

c) 4.

d) 6.

e) 8.

Exercício 2. A idade de cada um dos três filhos de Paulo é um número inteiro. A soma destes três inteiros é igual a 12 e seu produto é 30. Qual a idade de cada um dos seus três filhos?

Exercício 3. Zé Roberto possui cinco filhos, dois são gêmeos e os outros três são trigêmeos. Sabe-se que hoje a idade de Zé é igual à soma das idades dos seus cinco filhos. Daqui a 15 anos, se somarmos as idades dos cinco filhos, teremos o dobro da idade que Zé possuirá na mesma época e a soma das idades dos gêmeos será igual à soma das idades dos trigêmeos.

a) Qual a idade atual de Zé?

b) Qual a idade atual dos trigêmeos?

Exercício 4. Cada pessoa de um grupo de dez pessoas calcula a soma das idades dos outros nove integrantes do grupo. As dez somas obtidas foram 82, 83, 84, 85, 87, 89, 90, 90, 91, 92. Determine a idade da pessoa mais jovem.

Exercício 5. Patrícia escreveu, em ordem crescente, os inteiros positivos formados apenas por algarismos ímpares: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 31, 33, ... Qual foi o 157^o algarismo que ela escreveu?

a) 997.

b) 999.

c) 1111.

d) 1113.

e) 1115.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. Uma hora potência é uma hora cujo formato representa uma potência perfeita de um número inteiro com expoente maior que 1, ou seja, algo no formato a^b, em que a e b são inteiros e $b > 1$. Por exemplo, 03 : 43 é uma hora potência, afinal $343 = 7^3$, mas 01 : 10 não é uma hora potência, afinal 110 não é potência exata de um número inteiro. Também 02 : 89 não é uma hora potência, embora $289 = 17^2$, pois não existe a hora 02 : 89 já que os minutos vão apenas até 60. Quantas horas potências existem depois de 00 : 00 e antes de 02 : 59?

Exercício 7. Efetuando as operações indicadas na expressão:

$$\left(\frac{2^{2007} + 2^{2005}}{2^{2006} + 2^{2007}}\right) \cdot 2006,$$

obtemos um número de quatro algarismos. Qual é a soma dos algarismos desse número?

a) 4.

b) 5.

c) 6.

d) 7.

e) 8.

Exercício 8. Qual a soma de todos os números de cinco algarismos diferentes que podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?

Exercício 9. Quantas vezes aparece o algarismo 9 no resultado de:

$$10^{100} - 2003?$$

Exercício 10. Um número é enquadrado quando, ao ser somado com o número obtido invertendo a ordem de seus algarismos, o resultado é um quadrado perfeito. Por exemplo, 164 e 461 são enquadrados, pois $164 + 641 = 625 = 25^2$. Quantos são os números enquadrados entre 10 e 100?

Exercício 11. Severina escreveu um número inteiro positivo em cada lado de um quadrado. Em seguida escreveu em cada vértice o produto dos números escritos nos lados que se encontram nesse vértice. A soma dos números escritos em lados opostos é 60 e a soma dos números escritos nos outros lados é 85. Qual é a soma dos números escritos nos vértices?

Exercício 12. Que número deve ser somado aos dois termos de uma fração para se obter o inverso dessa mesma fração?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 13. Seja x um número real tal que $x + \frac{3}{x} = 9$. Um possível valor de $x - \frac{3}{x}$ é $\sqrt{a}$. Sendo assim, a soma dos algarismos de a será:

a) 11.

b) 12.

c) 13.

d) 14.

e) 15.

Exercício 14. Um número natural N, quando dividido por 3, 5, 7 ou 11, deixa resto igual a 1. Calcule o resto da divisão de N por 1155 e assinale a opção correta.

a) 17.

b) 11.

c) 7.

d) 5.

e) 1.

Exercício 15. Sobre os números inteiros positivos e não nulos x, y e z, sabe-se:

I. $x \neq y \neq z$.

II. $\frac{y}{x-z} = \frac{x+y}{z} = 2$.

III. $\sqrt{z} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Com essas informações, pode-se afirmar que o número $(x-y)\frac{6}{z}$ é:

a) ímpar e maior que três.

b) inteiro e com dois divisores.

c) divisível por cinco.

d) múltiplo de três.

e) par e menor do que seis.

Exercício 16. A equação $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ possui três raízes reais. Sejam p e q números reais fixos, onde p é não nulo. Trocando x por $py + q$, a quantidade de soluções reais da nova equação é:

a) 1.

b) 3.

c) 4.

d) 5.

e) 6.

Exercício 17. Bhaskara vende bolos na feira. Num certo dia, ele atendeu três fregueses somente. Euler, o primeiro freguês, comprou, do total de bolos da banca, metade dos bolos mais meio bolo. Tales, o segundo, também comprou do total de bolos que havia na banca, metade dos bolos mais meio bolo. Por fim, Cartesiano, o terceiro, também comprou do total de bolos que havia na banca, metade dos bolos mais meio bolo. Sabendo-se que, nesse dia, sobraram 10 bolos na banca de Bhaskara, e que cada bolo foi vendido por $R\$6,00$, então:

a) Bhaskara, com a venda de bolos, recebeu mais de 500 reais.

b) Tales gastou com os bolos a metade do que Cartesiano gastou.

c) Após Euler comprar os bolos, sobraram na banca menos de 40 bolos.

d) A soma da quantidade de bolos comprados por Euler e Cartesiano, juntos, é um número divisível por 5.

Exercício 18. Considere as expressões abaixo em que $a \neq b$.

$$P = \frac{a^3 - b^3}{a^2\sqrt{a} - \sqrt{b}a^2 + ba\sqrt{a} - b\sqrt{b}a + b^2\sqrt{a} - b^2\sqrt{b}}$$
$$Q = \frac{a^4 - b^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}$$

Assim, tem-se $\frac{Q}{P}$ igual a:

a) $\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$.

b) $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$.

c) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

d) $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Respostas e Soluções.

1. (Extraído do Banco de Questões OBMEP - 2012) Se todos os 10 algarismos fossem 9, sua soma seria $10 \cdot 9 = 90$, mas como a soma é 89, temos que ter 9 algarismos 9 e 1 algarismo 8. Se o número é par, então 8, que é o único algarismo par deste número, deve estar na casa das unidades. Resposta E.

2. (Extraído do Bando de Questões OBMEP 2016) Vamos observar a tabela abaixo com todas as possibilidades do produto de três números inteiros e positivos cujo produto é 30.

x	y	z	x+y+z
1	1	30	32
1	2	15	18
1	3	10	14
1	5	6	12
2	3	5	11

Vemos que a única possibilidade para que as idades tenham soma igual a 12 é aquela cujas idades são 1, 5 e 6 anos.

3. (Extraído do Banco de Questões OBMEP 2016)

a) Sejam z, g e t as idades de Zé, de cada um dos gêmeos e de cada um dos trigêmeos, respectivamente. Temos então:

I. $z = 2g + 3t$, (hoje);

II. $2(z + 15) = 2(g + 15) + 3(t + 15)$ (daqui a 15 anos);

III. $2(g + 15) = 3(t + 15)$ (daqui a 15 anos), donde chegamos $2g = 3t + 15$.

Substituindo III em II, temos $2(z + 15) = 3t + 15 + 30 + 3t + 45$, segue que $z = 3t + 30$. Substituindo III e II em I, temos $z = 2(z - 30) + 15$, segue que $z = 45$, ou seja, a idade atual de Zé é 45 anos.

b) Como $z = 3t + 30$, a idade atual dos trigêmeos é 5 anos.

4. (Extraído do Banco de Questões OBMEP 2011) Fazendo $82 + 83 + 84 + 85 + 87 + 89 + 90 + 90 + 91 + 92 = 873$, obtemos a soma das idades das dez pessoas nove vezes, já que cada uma entrou em nove somas. Assim, a soma das idades das dez pessoas é $\dfrac{873}{9} = 97$. Além disso, a pessoa mais jovem ficou fora da maior soma, ou seja, sua idade é $97 - 92 = 5$ anos.

5. (Extraído do Banco de Questões OBMEP 2012) Há cinco algarismos ímpares: 1, 3, 5, 7 e 9. Contando apenas números inteiros positivos, existem então 5 números formados por apenas um algarismo ímpar, $5 \cdot 5 = 25$ números formados por dois algarismos ímpares e $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ números formados por três algarismos ímpares. Assim, existem $5 + 25 + 125 = 155$ números inteiros positivos menores que 1000 formados por algarismos ímpares. O 156^o é 1111 e o 157^o é 1113. Resposta D.

6. (Extraído da OBM 2014/Vídeo Aula) Vamos montar uma tabela com todas as potências entre 0 e 259, observando as restrições do enunciado:

a	b	a^b	*hora*	a	b	a^b	*hora*
1	2	1	00:01	12	2	144	01:44
2	2	4	00:04	13	2	169	01:69
3	2	9	00:09	14	2	196	01:96
4	2	16	00:16	15	2	225	02:25
5	2	25	00:25	16	2	256	02:56
6	2	36	00:36	2	3	8	00:08
7	2	49	00:49	3	3	27	00:27
8	2	64	00:64	5	3	125	01:25
9	2	81	00:81	6	3	216	02:16
10	2	100	01:00	2	5	32	00:32
11	2	121	01:21	3	5	243	02:43
2	7	128	01:28				

Dos 23 resultados encontrados, 00 : 64, 00 : 81, 01 : 69, 01 : 96, não atendem às condições do enunciado. Portanto, temos $23 - 4 = 19$ horas potência.

7. (Extraído da OBM/Vídeo Aula)

$$\begin{aligned}\left(\frac{2^{2007}+2^{2005}}{2^{2006}+2^{2004}}\right)\cdot 2006 &= \left(\frac{2^{2004}(2^3+2^1)}{2^{2004}(2^2+2^0)}\right)\cdot 2006\\ &= \left(\frac{2^{2004}\cdot 10}{2^{2004}\cdot 5}\right)\cdot 2006\\ &= 2\cdot 2006\\ &= 4012,\end{aligned}$$

donde a soma soma dos algarismos é 7. Resposta D.

8. O total de números é $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$, sendo que $\dfrac{120}{5} = 24$ deles tem o 1 na unidade, 24 deles tem o 2 na unidade, ou seja, cada um dos 5 algarismos aparece 24 vezes na casa das unidades. Da mesma maneira, cada um dos algarismos aparece 24 vezes na cada das dezenas, na casa das centenas, na casa das unidades do milhar e na casa das dezenas do milhar. Como $24 \cdot 1 + 24 \cdot 2 + 24 \cdot 3 + 24 \cdot 4 + 24 \cdot 5 = 24(1+2+3+4+5) = 24 \cdot 15 = 360$, então a soma dos 120 números é $360 \cdot 10^4 + 360 \cdot 10^3 + 360 \cdot 10^2 + 360 \cdot 10^1 + 360 \cdot 10^0 = 360 \cdot 11111 = 3.999.960$.

9. (Extraído da OBM/Vídeo Aula)

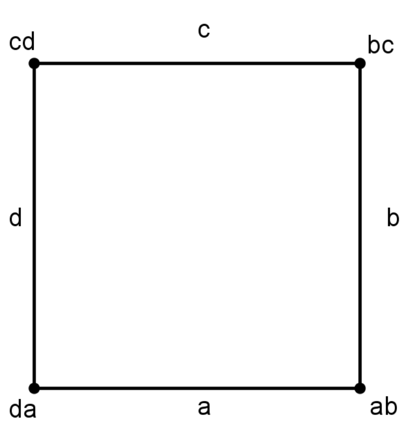
$$\begin{aligned} 10^{100} - 2003 &= \underbrace{100...0}_{100 zeros} - 1 - 2002 \\ &= \underbrace{99...9}_{99 noves} - 2002 \\ &= \underbrace{99...9}_{95 noves}7997. \end{aligned}$$

Portanto, são 97 noves.

10. (Extraído do Banco de Questões OBMEP 2012/Vídeo Aula) Seja ab, sendo $a \neq 0$, esse número enquadrado. Temos que $ab = 10a + b$ e seu inverso é $ba = 10b + a$. Sua soma é $10a + b + 10b + a = 11(a+b)$. Assim, $a + b$ deve ser um quadrado perfeito múltiplo de 11, sendo 11 o único que atende às restrições do problema. Assim, os números enquadrados são 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 e 92, ou seja, são 8 os números enquadrados entre 10 e 100.

11. (Extraído do Banco de Questões OBMEP 2012/Vídeo Aula) Sejam a, b, c e d os números escritos nos lados do quadrado no sentido horário. Os números associados aos vértices são, portanto, ab, bc, cd e da, e sua soma é:

$$\begin{aligned} ab + bc + cd + da &= b(a+c) + d(a+c) \\ &= (a+c)(b+d) \\ &= 85 \cdot 60 \\ &= 5100. \end{aligned}$$



12. (Extraído do Banco de Questões/Vídeo Aula) Seja a fração irredutível $\dfrac{a}{b}$, $b \neq 0$, vamos somar x no numerador e denominador para obtermos seu inverso:

$$\begin{aligned} \frac{a+x}{b+x} &= \frac{b}{a} \\ a(a+x) &= b(b+x) \\ a^2 + ax &= b^2 + bx \\ ax - bx &= b^2 - a^2 \\ x(a-b) &= (b-a)(b+a) \\ x &= \frac{(b-a)(b+a)}{a-b} \\ x &= -a - b. \end{aligned}$$

13. (Extraído do Colégio Naval - 2014)

$$\begin{aligned} x + \frac{3}{x} = 9 \quad &\Rightarrow \quad \left(x + \frac{3}{x}\right)^2 = 9^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} = 81 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{9}{x^2} = 75 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} = 75 - 6 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{3}{x}\right)^2 = 69 \\ &\Leftrightarrow \quad x - \frac{3}{x} = \pm\sqrt{69}. \end{aligned}$$

Portanto, $a = 69$ e a soma de seus algarismos é $6 + 9 = 15$. Resposta E.

14. (Extraído do Colégio Naval - 2014) Se N deixa resto 1 na divisão por 3, 5, 7 ou 11, então $N - 1$ é múltiplo de 3, 5, 7 e 11, ou seja, $N - 1$ é múltiplo de $mmc(3, 5, 7, 11) = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 1155$. Portanto, $N - 1$ é múltiplo de 1155 e o resto da divisão de N por 1155 é 1. Resposta E.

15. (Extraído do Colégio Naval - 2014) Como $\sqrt{z} = \left(\dfrac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$, então $z = \left(\dfrac{1}{9}\right)^{-1} = 9$. Como $\dfrac{y}{x-z} = \dfrac{x+y}{z} = 2$, podemos montar o sistema linear formado pelas equações $2x - y = 18$ e $x + y = 18$, donde encontramos $x = 12$ e $y = 6$. Assim, $(x-y)\dfrac{6}{z} = (12-6)\dfrac{6}{9} = 4$. Resposta E.

16. (Extraído do Colégio Naval - 2014)

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 + x - 2 &= \\ x^2(x-2) - (x-2) &= \\ (x-2)(x^2-1) &= \\ (x-2)(x+1)(x-1) &= 0. \end{aligned}$$

Como são três soluções para x, $\{-1, 1, 2\}$, e $p \neq 0$, então são três soluções também para $x = py + q$, $\left(\dfrac{-1-q}{p}, \dfrac{1-q}{p}, \dfrac{2-q}{p}\right)$. Resposta B.

17. (Extraído da EPCAR - 2014) Chamando a quantidade inicial de bolos de x, temos:

I. Euler comprou $\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}$, deixando na banca $\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}$;

II. Tales comprou $\dfrac{\frac{x}{2} - \frac{1}{2}}{2} + \dfrac{1}{2}$, deixando na banca $\dfrac{\frac{x}{2} - \frac{1}{2}}{2} - \dfrac{1}{2}$;

III. Por fim, Cartesiano comprou $\dfrac{\dfrac{\frac{x}{2} - \frac{1}{2}}{2} - \dfrac{1}{2}}{2} + \dfrac{1}{2}$, deixando na banca $\dfrac{\dfrac{\frac{x}{2} - \frac{1}{2}}{2} - \dfrac{1}{2}}{2} - \dfrac{1}{2}$.

Como ainda restaram 10 bolos, temos:

$$
\begin{aligned}
\dfrac{\dfrac{\frac{x}{2} - \frac{1}{2}}{2} - \dfrac{1}{2}}{2} - \dfrac{1}{2} &= 10 \\
\dfrac{\dfrac{\frac{x}{2} - \frac{1}{2}}{2} - \dfrac{1}{2}}{2} &= 10 + \dfrac{1}{2} \\
\dfrac{\dfrac{\frac{x}{2} - \frac{1}{2}}{2} - \dfrac{1}{2}}{2} &= \dfrac{21}{2} \\
\dfrac{\frac{x}{2} - \frac{1}{2}}{2} - \dfrac{1}{2} &= 21 \\
\dfrac{\frac{x}{2} - \frac{1}{2}}{2} &= 21 + \dfrac{1}{2} \\
\dfrac{\frac{x}{2} - \frac{1}{2}}{2} &= \dfrac{43}{2} \\
\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2} &= 43 \\
\dfrac{x}{2} &= 43 + \dfrac{1}{2} \\
\dfrac{x}{2} &= \dfrac{87}{2} \\
x &= 87.
\end{aligned}
$$

Assim, Euler comprou 44 bolos, Tales comprou 22 e Cartesiano comprou 11, sendo a quantidade de bolos comprados por Euler e Cartesiano, juntos, igual a 55, que é um número divisível por 5. Resposta D.

18. (Extraído da EPCAR - 2013) Simplificando P, temos:

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{a^3 - b^3}{a^2\sqrt{a} - \sqrt{b}a^2 + ba\sqrt{a} - b\sqrt{b}a + b^2\sqrt{a} - b^2\sqrt{b}} \\
&= \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{a^2(\sqrt{a} - \sqrt{b}) + ab(\sqrt{a} - \sqrt{b}) + b^2(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \\
&= \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a^2 + ab + b^2)} \\
&= \frac{a-b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}.
\end{aligned}
$$

Simplificando agora Q, temos:

$$
\begin{aligned}
Q &= \frac{a^4 - b^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3} \\
&= \frac{(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)}{a^2(a+b) + b^2(a+b)} \\
&= \frac{(a^2 + b^2)(a+b)(a-b)}{(a+b)(a^2 + b^2)} \\
&= a - b.
\end{aligned}
$$

Assim, $\dfrac{Q}{P} = \dfrac{a-b}{\dfrac{a-b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$. Resposta D.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com