Módulo de Probabilidade – Miscelânea de Exercícios

Probabilidade Condicional

2^a série E.M.

Professores Tiago Miranda e Cleber Assis

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Probabilidade – Miscelânea de Exercícios
Cálculo de Probabilidades

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Uma urna onde existiam oito bolas brancas e seis azuis foi perdida uma bola de cor desconhecida. Na hora do sorteio, uma bola foi perdida da urna. O sorteio continuou e, sendo assim, pergunta-se qual é a probabilidade de a bola perdida ser branca, dado que a bola retirada é branca?

Exercício 2. Num grupo de 400 homens e 600 mulheres, a porcentagem de homens com tuberculose é de 5% e das mulheres é 10%.

a) Escolhendo aleatoriamente uma pessoa do grupo, qual a probabilidade dela estar com tuberculose?

b) Se uma pessoa é retirada ao acaso e está com tuberculose, qual a probabilidade de que seja homem?

Exercício 3. Alberto diz que pode prever o futuro das colheitas. A comunidade em que ele vive, interessadíssima nesses poderes, se mobilizou para verificar o fato. Foi averiguado que ele acerta 80% das vezes em que diz que os tomates não vão germinar e 90% das vezes em que diz que os tomates vão germinar. Os tomates não germinam em 10% das colheitas. Se Alberto anunciar a perda da colheita, qual é a probabilidade real de que eles não germinem?

Exercício 4. Determinado veículo pode ter problemas mecânicos ou elétricos. Se ele tiver problemas mecânicos, não para, mas se tiver problema elétrico tem de parar imediatamente. A chance desse veículo ter problemas mecânicos é de $0,2$. Já a chance do mesmo veículo ter problemas elétricos é de $0,15$ se não houve problema mecânico precedente, e de $0,25$ se houve problema mecânico precedente. Agora, calcule:

a) Qual é a probabilidade de o veículo parar em determinado dia?

b) Se o veículo parou em certo dia, qual a chance de que tenha havido defeito mecânico?

c) Qual é a probabilidade de que tenha havido defeito mecânico em determinado dia se o veículo não parou nesse dia?

Exercício 5. No lançamento de dois dados simultaneamente, se as faces mostrarem números diferentes, qual é a probabilidade de que uma face seja o número 2?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. Uma caixa contém duas moedas honestas e uma com duas caras. Uma moeda é selecionada ao acaso e lançada duas vezes. Se ocorrem duas caras, qual a probabilidade de a moeda ter duas caras?

Exercício 7. Um juiz de futebol possui três cartões no bolso. Um é todo amarelo, outro é todo vermelho e o terceiro é vermelho de um lado e amarelo do outro. Num determinado lance, o juiz retira, ao acaso, um cartão do bolso e mostra ao jogador. Qual a probabilidade de:

a) o juiz ver a face vermelha e o jogador ver a amarela?

b) o jogador estiver vendo uma face vermelha, se for certo de o juiz estar vendo uma face vermelha?

Exercício 8. Sabe-se que 80% dos pênaltis marcados a favor do Brasil são cobrados por jogadores que jogam no Flamengo. A probabilidade de um pênalti ser convertido é de 40% se for um jogador do Flamengo e 70% caso contrário. Um pênalti a favor do Brasil acabou de ser marcado.

a) Qual a probabilidade do pênalti ser cobrado por um jogador do Flamengo e ser convertido?

b) Qual a probabilidade do pênalti ser convertido?

c) O pênalti foi desperdiçado, qual a probabilidade do que o cobrador tenha sido um jogador do Flamengo?

Exercício 9. Em um jogo, uma moeda honesta é jogada seguidamente. Cada vez que sai cara, o jogador ganha 1 real; cada vez que sai coroa, o jogador ganha 2 reais. O jogo termina quando o jogador tiver acumulado 4 ou mais reais.

a) Qual é a probabilidade de que o jogador ganhe exatamente 4 reais?

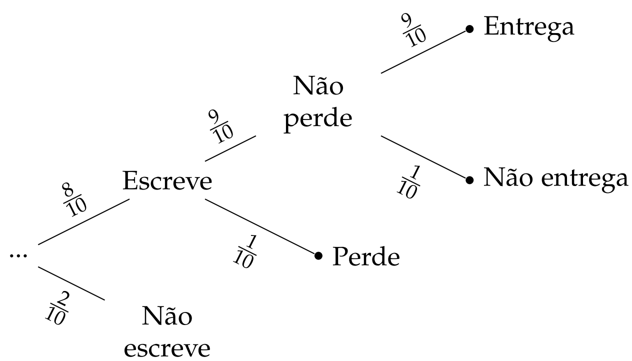
b) Qual é a probabilidade de que no último lançamento saia cara?

c) Dado que o jogador ganhou exatamente 4 reais, qual é a probabilidade de que tenha saído cara no último lançamento?

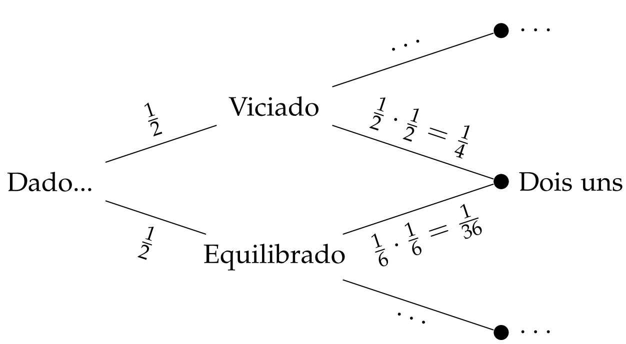
Exercício 10. Uma determinada doença afeta 1% de uma população. O teste acerta em 95% dos casos quando o paciente é sadio e acerta 90% dos casos quando o paciente é doente. Se João é um indivíduo desta população e seu resultado der positivo, qual a probabilidade dele ser realmente doente?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 11. Marina quer enviar uma carta a Verônica. A probabilidade de que Marina escreva a carta é de $\dfrac{8}{10}$. A probabilidade de que o correio não perca é de $\dfrac{9}{10}$. A probabilidade de que o carteiro a entregue é de $\dfrac{9}{10}$. Dado que Verônica não recebeu a carta, analise a "árvore de probabilidades" abaixo e responda, qual é a probabilidade condicional de que Marina não a tenha escrito?

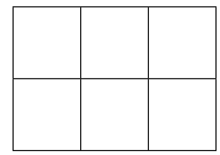


Exercício 12. Consideremos dois dados: um deles equilibrado (todas as faces com probabilidade igual a $\dfrac{1}{6}$) e outro viciado, no qual o um tenha probabilidade igual a $\dfrac{1}{2}$ de acontecer, enquanto as outras faces têm probabilidade igual a $\dfrac{1}{10}$. Escolhe-se um dos dados ao acaso e se efetuam dois lançamos, obtendo-se dois "uns". Observe a "árvore de probabilidades" abaixo com os possíveis eventos.



Qual a probabilidade de que o dado escolhido tenha sido o viciado?

Exercício 13. Cada cartela de uma coleção é formada por 6 quadrados coloridos, justaposto como indica a figura abaixo.



Em cada cartela, dois quadrados ficam coloridos de azul, dois de verde e dois de rosa. A coleção apresenta todas as possibilidades de distribuição dessas cores nas cartelas nas condições citadas e não existem cartelas com a mesma distribuição de cores. Retirando-se ao acaso uma cartela da coleção, qual a probabilidade de que somente uma coluna apresente os quadrados da mesma cor?

Exercício 14. Os casais A e B têm dois filhos cada um. Sabe-se que o casal A tem um filho homem e que o filho mais velho do casal B também é homem. Se a e b indicam, respectivamente, as probabilidades de que os dois filhos do casal A sejam homens e que os dois filhos do casal B também sejam homens, então decida se $a > b$, $a = b$ ou $a < b$.

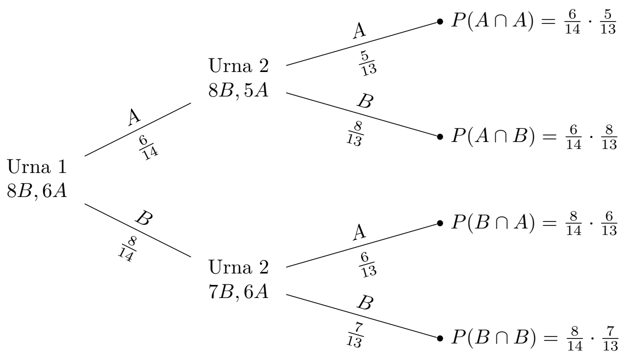
Exercício 15. Duas moedas falsas de igual peso são misturadas com 8 moedas genuínas idênticas. O peso de cada uma das moedas falsificadas é diferente do peso de cada uma das moedas verdadeiras. Um par de moedas é selecionado aleatoriamente, sem reposição, dentre as 10 moedas. Um segundo par é selecionado aleatoriamente, também sem reposição, entre as 8 restantes. O peso combinado do primeiro par é igual ao peso combinado do segundo par. Qual é a probabilidade de que todas as 4 moedas selecionadas sejam genuínas?

Exercício 16. Suponha que a ocorrência de chuva dependa somente das condições de tempo do dia imediatamente anterior. Admita que se chove hoje choverá amanhã com probabilidade $0,7$ e se não chove hoje choverá amanhã com probabilidade $0,4$. Sabendo-se que choveu hoje, qual a probabilidade de chover depois de amanhã?

Exercício 17. Em um teste de múltipla escolha, a probabilidade do aluno saber a resposta é p. Numa questão com m alternativas, se ele sabe a resposta, ele acerta, caso contrário, ele "chuta" qualquer alternativa com igual probabilidade. Qual a probabilidade do aluno saber a resposta se ele acertou a pergunta?

Respostas e Soluções.

1. Observe que as probabilidades, *a priori*, estão no diagrama abaixo:



Daí, a probabilidade de sair branca é de

$$\frac{6}{14} \cdot \frac{8}{13} + \frac{8}{14} \cdot \frac{7}{13} = \frac{104}{182}.$$

Agora, a probabilidade de termos a branca perdida e sair branca na segunda retirada é igual a $\frac{8}{14} \cdot \frac{7}{13} = \frac{56}{182}$. Por fim, a probabilidade pedida fica

$$\frac{\frac{56}{182}}{\frac{104}{182}} = \frac{56}{104} = \frac{7}{13}.$$

2. (Adaptado do vestibular da UNICAMP)
Há $0,05 \cdot 400 = 20$ e $0,10 \cdot 600 = 60$ pessoas com tuberculose.

a) Como temos 80 pessoas com tuberculose, e a probabilidade pedida é $P = \frac{80}{1000} = 8\%$.

b) Agora temos uma probabilidade condicional com universo 80 e evento destacado com 20 ocorrências. Daí, a probabilidade solicitada será $P = \frac{20}{80} = 25\%$.

3. (Extraído do Veduca)
O tomates não germinarão quando Alberto falar sobre a perda da colheita e isso de fato ocorrer ou quanto ele der um falso positivo. Esses caminhos ocorrem com probabilidade de

$$P = \frac{10}{100} \cdot \frac{80}{100} + \frac{90}{100} \cdot \frac{10}{100} = \frac{17}{100}.$$

Agora, destacando que ele proferiu pela perda, temos a probabilidade condicional de

$$P = \frac{0,1 \cdot 0,8}{0,17} = \frac{8}{17}.$$

4. (Extraído do Veduca)
O veículo parará se houver problema elétrico ou se houver problema mecânico e depois um problema elétrico.

a) A probabilidade dele ter apenas um problema elétrico é $P_1 = \frac{8}{10}\frac{15}{100} = \frac{12}{100}$, e a probabilidade de ter primeiro o mecânico e depois o elétrico é de $P_2 = \frac{2}{10} \cdot \frac{25}{100} = \frac{5}{100}$. Por fim, a probabilidade pedida fica

$$P_1 + P_2 = \frac{12}{100} + \frac{5}{100} = \frac{17}{100}.$$

b) Considerando a informação do item anterior, para calcular a probabilidade condicional, basta perceber que a probabilidade dele ter um problema mecânico e um problema elétrico é $P_2 = \frac{5}{100}$. Portanto, a probabilidade condicional procurada é

$$P_3 = \frac{\frac{5}{100}}{\frac{17}{100}} = \frac{5}{17}.$$

c) Se o veículo não parou, temos o complementar do **item (a)**, ou seja $P_4 = 1 - 0,17 = 0,83$. Agora, resta a probabilidade de ter tido defeito mecânico e não ter dado problema elétrico, isto pode ser calculado como $P_5 = \frac{2}{10} \cdot \frac{75}{100} = \frac{3}{20} = 15\%$. Por fim, a probabilidade condicional procurada é:

$$P_6 = \frac{P_5}{P_4} = \frac{0,15}{0,83} = \frac{15}{83}.$$

5. (Extraído do Veduca)
Há 36 resultados no lançamento de dois dados. Como há duas faces diferentes, perdemos 6 resultados de faces iguais, ficando o universo condicionado a 30 duplas de valores distintos. O primeiro dado pode ficar com a face 2 para cima e ter feito par com outros 5 resultados. O mesmo vale para o segundo dado. Logo o evento destacado ocorre em 10 pares e a probabilidade condicional é

$$P = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

6. (Adaptado do vestibular da FGV)
Para sortear a moeda desonesta a probabilidade é de $\frac{1}{3}$, e caso ela seja sorteada, a dupla de caras nos lançamentos é evento certo. Agora, a dupla de caras pode vir do sorteio de alguma das moedas honestas ($P_{\text{honesta}} = \frac{2}{3}$) e depois de uma sequência de duas caras

($P_{\text{duas caras nas moedas honestas}} = \frac{1}{4}$). Por fim, a probabilidade condicional fica

$$P = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

7. (Adaptado da Videoaula (Cesgranrio))

a) Para termos juiz e jogador vendo faces diferentes, precisamos do cartão com tal formato, isso ocorre com probabilidade de $\frac{1}{3}$. Agora para a face vermelha estar para o juiz há $\frac{1}{2}$ de probabilidade. Logo, a probabilidade buscada é

$$P = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

b) Se o juiz está vendo vermelho, temos a possibilidade do **item (a)** ou a retirada do cartão todo vermelho (com probabilidade $\frac{1}{3}$), que também encerra o cenário para a visão do jogador. Assim, a probabilidade condicional fica

$$P = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1} = \frac{2}{3}.$$

8. Sejam os eventos F = cobrador do Flamengo e C = pênalti convertido.

a) Deseja-se o resultado de $P(F\cap C)$ que é igual a

$$\begin{aligned} P(F\cap C) &= P(F)\cdot P(C|F)\\ &= 0,8\cdot 0,4\\ &= 0,32. \end{aligned}$$

b) Deseja-se o resultado de $P(F\cap C)+P(\overline{F}\cap C)$ que é igual a

$$\begin{aligned} P(F\cap C)+P(\overline{F}\cap C) &= P(F)\cdot P(C|F)+P(\overline{F})\cdot P(C|\overline{F})\\ &= 0,8\cdot 0,4+0,2\cdot 0,7\\ &= 0,32+0,14\\ &= 0,46. \end{aligned}$$

c) Por definição $P(F|\overline{C}) = \frac{P(F\cap\overline{C})}{P(\overline{C})}$. Sendo assim, podemos fazer

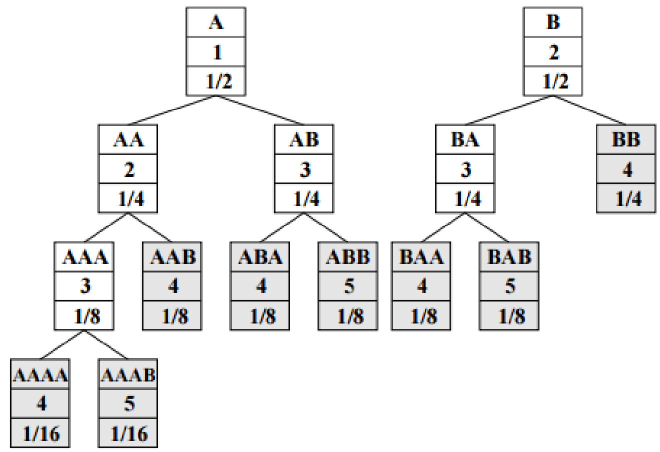
$$P(\overline{C}) = 0,8\cdot 0,6+0,2\cdot 0,3 = 0,54.$$

e

$$P(F\cap\overline{C}) = 0,8\cdot 0,6 = 0,48.$$

Por fim, chegamos a $P(F|\overline{C}) = \frac{0,48}{0,54} = \frac{8}{9}$.

9. (Extraído do material do PROFMAT – 2011)
Observe a "árvore de probabilidades" abaixo, na qual A representa o resultado "cara" e B, "coroa". A segunda linha de cada tabelinha indica o prêmio pago a depender do resultado do lançamento da moeda e a terceira linha a probabilidade acumulada para ter o resultado encontrado.



a) Para calcular a probabilidade de que o jogador termine com exatamente 4 reais, basta somar as probabilidades dos nós em cinza que têm ganho de 4 reais. São eles: $AAAA\left(\frac{1}{16}\right)$, $AAB\left(\frac{1}{8}\right)$, $ABA\left(\frac{1}{8}\right)$, $BAA\left(\frac{1}{8}\right)$ e $BB\left(\frac{1}{4}\right)$. A soma fica $\frac{11}{16}$.

b) O jogo termina com cara em todos os nós em cinza que terminam com a letra A. Então basta somar as probabilidades de cada caso. São eles $AAAA\left(\frac{1}{16}\right)$, $ABA\left(\frac{1}{8}\right)$ e $BAA\left(\frac{1}{8}\right)$, o que dá $\frac{5}{16}$.

c) Das situações em que o jogador terminou com 4 reais, listadas em (a), que têm probabilidade de $\left(\frac{11}{16}\right)$ de ocorrer, apenas $AAAA$, ABA e BAA terminam com A (cara), com probabilidade de $\left(\frac{5}{16}\right)$. Então a probabilidade de se terminar com cara dado que o jogador terminou com 4 reais é $\frac{\frac{5}{16}}{\frac{11}{16}} = \frac{5}{11}$.

10. (Adaptado da Videoaula)
O resultado pode ser positivo vindo de um positivo verdadeiro ($P_1 = 1\%\cdot 90\% = 0,90\%$) ou de um "falso positivo" vindo de um erro de resposta ($P_2 = 99\%\cdot 5\% = 4,95\%$). Assim, a probabilidade condicional pedida fica

$$P = \frac{P_1}{P_1+P_2} = \frac{0,90\%}{0,90\%+4,95\%} = \frac{90}{585} \cong 15,38\%.$$

11. Temos que:

$$\begin{aligned}
P[\text{não recebe}] &= \frac{2}{10} + \frac{8}{10} \cdot \frac{1}{10} + \frac{8}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} \\
P[\text{não recebe}] &= \frac{352}{1000} \\
P[\text{não escreve}] &= \frac{2}{10} \\
P[\text{não escreve}|\text{não recebe}] &= \frac{\frac{2}{10}}{\frac{352}{1000}} \\
P[\text{naõ escreve}|\text{não recebe}] &= \frac{25}{44}.
\end{aligned}$$

12. Temos que:

$$\begin{aligned}
P[\text{observar dois uns}] &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{36} \\
P[\text{observar dois uns}] &= \frac{5}{36} \\
P[\text{dado viciado e observar dois uns}] &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \\
P[\text{dado viciado e observar dois uns}] &= \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

A probabilidade procurada é então igual a $P[(\text{dado viciado})|(\text{dois uns})] = \dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{5}{36}} = \dfrac{9}{10}$.

13. (Adaptado da Videoaula (UFRS))
Devemos ter para o evento pedido, 3 cores para a coluna com dois quadradinhos de mesma cor, 3 opções para a coluna que ficará de tal modo e 4 disposições para os demais quadradinhos de modo a não repetir cor na coluna, a saber (com uma coluna rosa, por exemplo):

R	A	A
R	V	V

R	A	V
R	V	A

R	V	V
R	A	A

R	V	A
R	A	V

E o universo de arranjos é igual a $P_6^{2,2,2} = 90$. Por fim, a probabilidade condicional fica $P = \dfrac{3 \cdot 3 \cdot 4}{90} = 40\%$.

14. (Adaptado da Videoaula)
O caso A pode ter qualquer um dos pares ordenados (homem, homem), (homem,mulher) ou (mulher, homem), indicando os possíveis arranjos de nascimentos dos filhos e, portanto, $a = \dfrac{1}{3}$. Já o casal B só pode ter (homem, homem) ou (mulher, homem) e, consequentemente, $b = \dfrac{1}{2}$. O que encerra $b > a$.

15. (Adaptado da AIME − 2011)
Aplicaremos a probabilidade condicional,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

onde A é conjuntos dos resultados das 4 moedas serem genuínas e B é o conjunto das duplas de moedas com pesos iguais. As possibilidades para B se resumem a (defina g como uma moeda genuína e f para uma falsa, e os pares listados nas sequências são os dois primeiros e os dois últimos nas quádruplas abaixo)

$$(g, g, g, g), (g, f, g, f), (g, f, f, g), (f, g, g, f), (f, g, f, g).$$

A probabilidade de $A \cap B$ é

$$P_{A \cap B} = \frac{8}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{6}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{1}{3},$$

e B tem probabilidade de

$$P_B = \frac{1}{3} + 4 \times \left(\frac{8}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{7}{8} \times \frac{1}{7} \right) = \frac{19}{45},$$

Sendo assim, $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{19}{45}} = \dfrac{15}{19}$.

16. A probabilidade de chuva amanhã será igual a $0,7$ e temos a probabilidade de $0,7 \cdot 0,7 = 0,49$ de chover depois de amanhã. A probabilidade de não chover amanhã é igual a $0,3$ e, neste caso, a probabilidade de chover depois de amanhã será $0,3 \cdot 0,4 = 0,12$. O total fica como

$$P = 0,49 + 0,12 = 0,61 = 61\%.$$

17. Ele pode ter acertado de modo consciente ($P_1 = p$) ou no "chute" ($P_2 = (1-p) \cdot \dfrac{1}{m}$). Assim, a probabilidade condicional fica

$$P = \frac{P_1}{P_1 + P_2} = \frac{p}{p + (1-p)\frac{1}{m}} = \frac{p}{\frac{1}{m} + p\left(1 - \frac{1}{m}\right)}.$$

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com