Introdução ao Cálculo – Funções – Parte 2

Função Inversa

Tópicos Adicionais

Portal da Matemática
OBMEP

Introdução ao Cálculo – Funções – Parte 2
Função Inversa

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Nos itens abaixo, encontre uma expressão para a inversa de cada uma das funções.

a) $f(x) = x^3 + 2$.

b) $g(x) = \sqrt{-x-1}$

Exercício 2. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 3$.

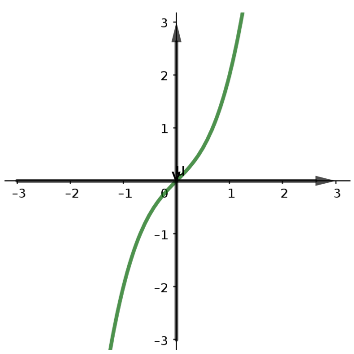
a) Verifique que se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.

b) Verifique que dado $y \in \mathbb{R}$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$.

c) Conclua que f é inversível e encontre a sua inversa.

Exercício 3. Verifique que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ não é inversível.

Exercício 4. A figura abaixo representa o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Esboce o gráfico da sua inversa



Exercício 5. Encontre a inversa das funções dadas e determine o domínio de cada uma.

a) $y = \dfrac{x}{5}$

b) $y = \sqrt{(2x+4)^3 - 7}$

c) $y = \left(\dfrac{1}{8}\right)^{1-x}$.

Exercício 6. Seja f uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ bijetiva tal que $f(x+3) = 2x - 1$. Determine $f^{-1}(x)$.

Exercício 7. Seja a função $f(x) = \dfrac{x-2}{1+x}$, de A em B, bijetora. Determine a expressão de sua inversa.

Exercício 8. Construa o gráfico da função $f(x) = 2 + \log_2(x-1)$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 9. Na(s) questão(ões) a seguir escreva nos parênteses a soma dos itens corretos.

1. Sobre funções reais, é verdade que:

(01) O domínio de $f(x) = 7x/(x+2)$ é $\mathbb{R}$.

(02) $f(x) = 3x^2 + 4x$ é uma função par.

(04) $f(x) = (3x+2)/2x$ é a função inversa de $g(x) = 2/(2x-3)$.

(08) Sendo $f(x) = 2x + 4$, então $f(x) > 0$, para todo $x > 0$.

(16) Sendo $f(x) = 4x^2 - 7x$, então $f(-1) = 11$.

Exercício 10. As três funções f, g e h satisfazem $h(x) = g(f(x))$. Se $h(x) = x^2 + 2x - 4$ e $g(x) = 3e^x - 2$, qual é a equação de $f(x)$?

Exercício 11. Encontre a inversa de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 4e^{2x} + 3$.

Exercício 12. Encontre a inversa de $h : [-1, 0] \to [0, 1]$, $h(x) = -x^2$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 13. Defina a função $g(x) = 3x + 2$. Se $g(x) = 2f^{-1}(x)$ e $f^{-1}(x)$ é a inversa da função $f(x) = ax + b$, encontre o valor de $\dfrac{a+b}{2}$.

Exercício 14. Dê um exemplo de uma bijeção $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f + f^{-1}$ e $f - f^{-1}$ são também bijeções.

Exercício 15. Se $f : [2, +\infty] \to [1, +\infty]$ é dado por $f(x) = x^2 - 4x + 5$, mostre que f é uma bijeção e encontre os pontos de interseção entre os gráficos de f e f^{-1}.

Exercício 16. Na figura, a curva f definida por $f(x) = 2x + 1$ e sua inversa f^{-1} representam lados opostos de um trecho de rua. Nessas condições, pode-se afirmar que a distância mínima a ser percorrida para atravessar essa rua, do ponto P até o ponto Q, em unidades de comprimento, é igual a:

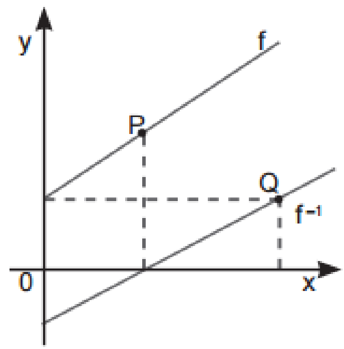
a) $\sqrt{2}$.

b) 2.

c) $2\sqrt{2}$.

d) 3.

e) $3\sqrt{2}$.



Exercício 17. Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$, seja $f : \mathbb{R}\backslash\{-d/c\} \to \mathbb{R}\backslash\{a/c\}$ dada por $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Verifique que f é uma bijeção e obtenha uma expressão para a sua inversa.

Exercício 18. Considere a função f definida por $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, em que a, b, c and d são números reais não nulos, possuindo as propriedades $f(19) = 19$, $f(97) = 97$ e $f(f(x)) = x$ para todos os valores de x exceto $\frac{-d}{c}$. Encontre o único número que não está na imagem de f.

Exercício 19. se $f(x) = ax + b$ e $f^{-1}(x) = bx + a$, com a e b reais, determine o valor de $a + b$.

Exercício 20. Para quantos valores de $x \in [0, \pi]$ vale que $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} 6x) = \cos^{-1}(cosx)$?

Respostas e Soluções.

1.

a) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$.

b) $g^{-1}(x) = -x^2 - 1$.

2.

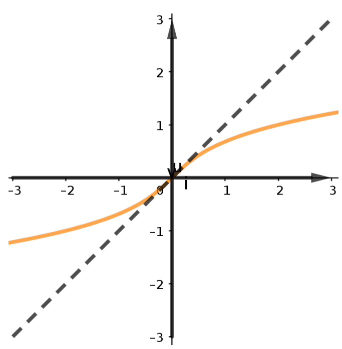
a) Se $x_1 + 3 = f(x_1) = f(x_2) = x_2 + 3$, então $x_1 = x_2$. Portanto, $x_1 \neq x_2$ implica $f(x_1) \neq f(x_2)$.

b) Dado qualquer y, para $x = y - 3$, temos $f(x) = x + 3 = (y-3) + 3 = y$.

c) Os itens anteriores mostram que f é injetiva e sobrejetiva, ou seja, é uma bijeção. A inversa de f é a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x - 3$.

3. Como $f(-1) = f(1) = 1$, f não é injetiva e consequentemente não admite inversa.

4. Como o gráfico da função inversa pode ser obtido por meio de uma reflexão na reta $y = x$. O esboço do gráfico é representado por:



5.

a) $f^{-1} : y = 5x$, $D(f) = \mathbb{R}$ e $D(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

b) $f^{-1} : y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2+7} - 4}{2}$, $D(f) = (\dfrac{\sqrt[3]{7} - 4}{2}, \infty)$ e $D(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

c) $f^{-1} : y = 1 + \log_8 x$, $D(f) = \mathbb{R}, +\infty)$ e $D(f^{-1}) = (0, +\infty)$.

6. Substituindo x por $k-3$, temos $f(k-3+3) = 2(k-3) - 1$, ou seja, $f(k) = 2k - 7$. Temos então que $f(x) = 2x - 7$. Como queremos a inversa, basta isolar x, ou seja, $x = \dfrac{f(x)+7}{2}$. Concluímos que $f^{-1}(x) = \dfrac{x+7}{2}$.

7.

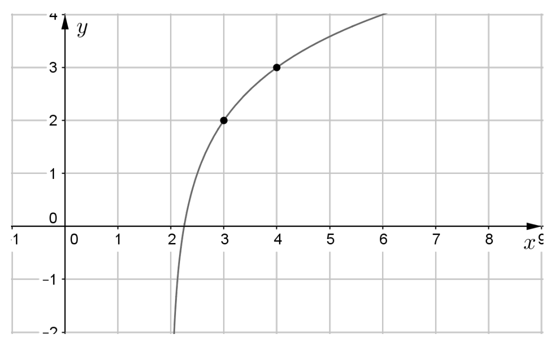
$$\begin{aligned} y &= \frac{x-2}{1+x} \\ y + yx &= x - 2 \\ yx - x &= -y - 2 \\ x(y-1) &= -y-2 \\ x &= \frac{y+2}{1-y}. \end{aligned}$$

Portanto, temos que $f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{1-x}$.

8. Temos

$$\begin{aligned} y &= 2 + \log_2(x-1) \\ y - 2 &= \log_2(x-1) \\ 2^{y-2} &= x - 1 \\ 2^{y-2} + 1 &= x. \end{aligned}$$

basta construir o gráfico de $y = 2^{x-2} + 1$ e refleti-lo com respeito à reta $y = x$:



9. (Extraído do Vestibular da UFBA)

(01) Falso, pois $x = -2$ não está no domínio.

(02) Falso, pois $-1 = f(-1) \neq f(1) = 7$.

(04) Verdadeiro, pois $g(f(x)) = g(f(x)) = x$.

(08) Verdadeiro, pois $2x + 4 > 2 \cdot 0 + 4 = 4$, para $x > 0$.

(16) Verdadeiro, pois $f(-1) = 4(-1)^2 - 7(-1) = 11$.

Portanto, a soma das respostas verdadeiras é 28.

10. Como g é injetiva e sua inversa é $g^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{3}\right)$, temos

$$\begin{aligned} f(x) &= g^{-1}(h(x)) \\ &= \ln\left(\frac{h(x)+2}{3}\right) \\ &= \ln\left(\frac{x^2+2x-2}{3}\right) \end{aligned}$$

11. Para encontrar a expressão algébrica da inversa, note que

$$\begin{aligned} x &= 4e^{2y}+3 \\ \frac{x-3}{4} &= e^{2y} \\ \ln(\frac{x-3}{4}) &= 2y \\ \frac{\ln(\frac{x-3}{4})}{2} &= y. \end{aligned}$$

Como a imagem de f é o conjunto $(3,+\infty)$, a sua inversa é a função $f^{-1}:(3,+\infty)\to\mathbb{R}$, dada por $f^{-1}(x) = \ln\sqrt{\frac{x-3}{4}}$.

12. Se $y=-x^2$, então $x=\pm\sqrt{-y}$. Como o domínio de f é $[-1,0]$, segue que $x=-\sqrt{-y}$. Portanto a inversa de h é a função $h^{-1}:[0,1]\to[-1,0]$ dada por $h^{-1}(x)=-\sqrt{-x}$

13. De $x=f(f^{-1}(x))=a(f^{-1}(x))+b$, segue que $f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$. Assim temos

$$\begin{aligned} g(x) &= 2f^{-1}(x) \\ 3x+2 &= 2\cdot\frac{x-b}{a} \end{aligned}$$

Daí $\frac{2}{a}=3$ e $-\frac{2b}{a}=2$, ou seja, $a=2/3$ e $b=-2/3$. Consequentemente $\frac{a+b}{2}=0$.

14. Escolha $f(x)=2x$. Daí $f^{-1}(x)=x/2$ e $(f+f^{-1})(x)=5x/2$, $(f-f^{-1})(x)=3x/2$ são bijeções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

15. Como $f(x)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$, para que y esteja na imagem de f, basta que

$$\begin{aligned} y &= (x-2)^2+1 \\ y-1 &= (x-2)^2 \\ \pm\sqrt{y-1} &= x-2 \end{aligned}$$

Como $x\geq 2$, devemos ter $x-2=\sqrt{y-1}$, ou seja, $x=\sqrt{y-1}+2$. Definindo $g:[1,+\infty]\to[2,+\infty]$ por $g(x)=\sqrt{x-1}+2$, temos $g(f(x))=f(g(x))=x$ e assim g é a inversa de f. Queremos agora determinar os valores de x tais que

$$\sqrt{x-1}+2=(x-2)^2+1$$

Seja $z=\sqrt{x-1}$. A equação anterior pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} z+2 &= (z^2-1)^2+1 \\ (z+1) &= (z-1)^2(z+1)^2 \\ (z+1)[1-(z-1)^2(z+1)] &= 0. \end{aligned}$$

Como $z\geq 0$, segue que $z(z^2-z-1)=(z-1)^2(z+1)-1=0$. Novamente usando que $z\geq 0$, as soluções são $z=0$ ou $z=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Lembrando que $z=\sqrt{x-1}$, temos $x=1$ ou $x=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$. Dado que $x\geq 2$ a única solução produz o ponto de interseção $(\frac{5+\sqrt{5}}{2},\frac{5+\sqrt{5}}{2})$.

16. A inversa de f é dada por $f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$. O gráfico de f intersecta o eixo y no ponto $(0,1)$ e o gráfico de f^{-1} intersecta o eixo x no ponto $(1,0)$. Portanto, as coordenadas de P e Q são, respectivamente, $(1,3)$ e $(3,1)$. A distância entre esses pontos é

$$\sqrt{(3-1)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{2}.$$

17. Note que se $x\neq a/c$ seque que

$$\begin{aligned} x &= \frac{ay+b}{cy+d}\Leftrightarrow \\ cxy+dx &= ay+b\Leftrightarrow \\ y(cx-a) &= b-dx\Leftrightarrow \\ y &= \frac{d-bx}{cx-a}. \end{aligned}$$

Como x é arbitrário, isso mostra que f é sobrejetora. Definindo $g:\mathbb{R}\backslash\{a/c\}\to\mathbb{R}\backslash\{-d/c\}$ por $g(x)=\frac{d-bx}{cx-s}$, temos $g(f(x))=x$. Se $f(x_1)=f(x_2)$, $x_1=g(f(x_1))=g(f(x_2))=x_2$ e isso mostra que f é injetiva. Portanto, f é uma bijeção e g é a sua inversa.

18. (Extraído da AIME) A inversa de f é $f^{-1}(x)=\frac{19d-b}{a-19c}$. Como $f(f(x))=x$, $f(x)=f^{-1}(x)$. Substitutindo 19 e 97 temos o sistema,

$$\begin{aligned} \tfrac{19a+b}{19c+d} &= \tfrac{19d-b}{a-19c} \\ \tfrac{97a+b}{97c+d} &= \tfrac{97d-b}{a-97c} \end{aligned},$$

Dele podemos obter $116c=a-d$. Assim

$$\begin{aligned} f(116) &= \frac{116a+b}{116c+d} \\ &= \frac{116a+b}{a} \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} 116 &= f(f(116)) \\ &= \frac{a(\frac{116a+b}{a})+b}{c(\frac{116a+b}{a})+d} \end{aligned}$$

Isso produz

$$\begin{aligned}
\frac{116a+2b}{c\left(\frac{116a+b}{a}\right)+d} &= 116 \\
116a+2b &= 116(c(\frac{116a+b}{a})+d) \\
116a+2b &= 116c(116+b/a)+116d \\
116a+2b &= (a-d)(116+b/a)+116d \\
2b &= 116c(b/a)
\end{aligned}$$

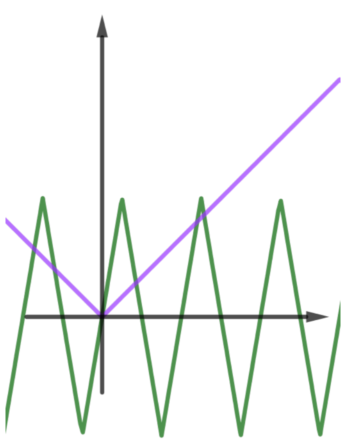
Portanto, $\frac{a}{c}=58$. Pelo problema anterior, esse é o único número que não está na imagem de f.

19. (Extraído da AMC) Temos

$$\begin{aligned}
x &= f(f^{-1}(x)) \\
&= a(bx+a)+b \\
&= abx+a^2+b
\end{aligned}$$

Assim $ab=1$ e $a^2+b=0$, ou seja, $a^2+1/a=0$. Daí $a^3+1=0$ e $a=b=-1$. Portanto $a+b=-2$.

20. Sejam $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} 6x)$ e $g(x) = \cos^{-1}(cosx)$. Para $0 \leq x \leq \pi/12$, temos $f(x)=6x$. Como $\operatorname{sen}(6(\pi/6-x)) = \operatorname{sen}(6x)$, $\operatorname{sen}(6(\pi/3-x)) = -\operatorname{sen}(6x)$ e $\operatorname{sen}(6(\pi/3+x)) = \operatorname{sen}(6x)$, segue que $f(\pi/6-x)=f(x)$, $f(\pi/3-x)=-f(x)$ e $f(\pi/3+x)=f(x)$. Dessas equações, podemos concluir que a função f possui período $\pi/3$ e que o gráfico é simétrico em relação às retas $x=\dfrac{\pi}{6}+2k\cdot\dfrac{\pi}{3}$, com $k\in\mathbb{Z}$. Assim o gráfico consiste de triângulos justapostos como indicado na figura abaixo. Os gráficos de f e g se intersectam duas vezes no intervalo $[0,\pi/6]$ e outras duas vezes no intervalo $[\pi/3,\pi/2]$. Se $\pi/2 < x \leq \pi$, então $g(x)=x>\pi/2$ e consequentemente não existem outras interseções.



Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com