

Módulo de Progressões Aritméticas

Definição e Lei de Formação

1^a série E.M.

Professores Tiago Miranda e Cleber Assis



1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Uma *progressão aritmética*, costumeiramente chamada de *P.A.*, é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com um valor fixo chamado de diferença comum (simbolizado pela letra d) ou razão da progressão (destacado como r). Por exemplo, a sequência abaixo é uma progressão aritmética com termo inicial 3 e diferença comum 4.

$$\begin{array}{lll} a_1 = 3, & a_2 = 7, & a_3 = 11, \\ a_4 = 15, & a_5 = 19, & a_6 = 23, \\ a_7 = 27, & a_8 = 31, & a_9 = 35, \quad \dots \end{array}$$

Veja que estamos denotando o número da posição i pelo símbolo a_i .

- Se o primeiro termo de uma progressão aritmética é 2 e sua diferença comum é 3, qual é o valor do quarto termo?
- Qual o valor da razão de uma P.A. cujo primeiro termo é -3 e o quinto termo vale 17?
- Na progressão aritmética $(\dots, 3, 15, 27, 39, 51, \dots)$, sabe-se que $a_{36} = 231$. Observando a posição do termo $a_y = 27$, qual o valor de y ?
- A professora de João pediu que ele calculasse o décimo primeiro termo de uma progressão aritmética. Infelizmente ele esqueceu qual era o termo inicial e a diferença comum. As únicas informações das quais ele lembrava eram:

$$\begin{array}{rcl} a_4 + a_7 + a_{10} & = & 207 \\ a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} & = & 553. \end{array}$$

Quanto vale o décimo primeiro termo?

Exercício 2. Maria começou a guardar moedas de 1 real com o intuito de juntar dinheiro para comprar um celular em 6 meses. Ela começou com dois reais e a cada dia juntava mais 3 reais do lanche, como ilustra a figura abaixo.

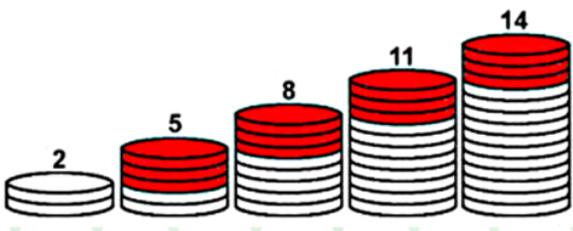


Figura: OlabsMathematics/ArithmeticProgression

Ao final de 182 dias quanto dinheiro ela terá guardado?

Exercício 3. A taxa de um determinado condomínio da cidade de Fortaleza é paga de acordo com o andar em que se mora. Quem mora no 1º andar paga R\$ 105,00; no 2º andar paga R\$ 120,00. Sabendo que os valores a serem pagos estão em progressão aritmética, quanto pagará, em reais, quem mora no décimo andar desse condomínio?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 4. Os comprimentos dos degraus da escada abaixo diferem uniformemente em 2 cm entre os vizinhos de cima para baixo.



Imagem:

<http://www.ekshiksha.org.in/eContent-Show.do?documentId=206>

O degrau mais inferior mede 45 cm. Qual a medida do segundo degrau de cima para baixo?

Exercício 5. A sequência dos números pentagonais está ilustrada na figura abaixo:

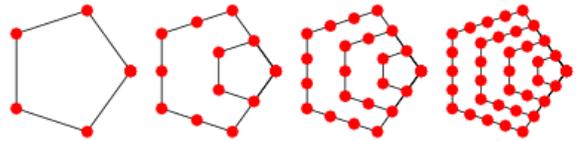


Figura: <http://mathworld.wolfram.com/PentagonalNumber.html>

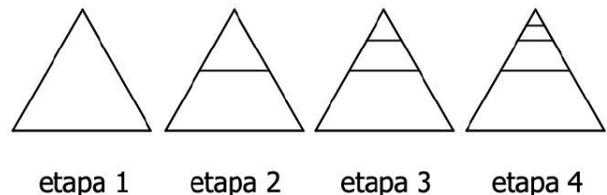
Fazendo apenas a contagem de pontos em cada borda externa (perímetro) em cada pentágono chegaremos a:

$$\begin{array}{l} a_1 = 5 \\ a_2 = 10 \\ a_3 = 15 \\ a_4 = 20. \end{array}$$

Sendo assim, qual o valor de a_{20} ?

Exercício 6. Os lados de triângulo formam uma progressão aritmética de razão 1 e o maior ângulo é o dobro do menor. Determine o valor dos lados desse triângulo.

Exercício 7. Considere o padrão de construção representado pelos desenhos abaixo.



Na etapa 1, há um único triângulo equilátero. Na etapa 2, é traçado um segmento a partir dos pontos médios de dois lados do triângulo da etapa 1, formando dois triângulos equiláteros. Na etapa 3, é traçado um segmento a partir dos pontos médios de dois lados do triângulo menor da etapa 2, formando três triângulos equiláteros. Na etapa 4 e nas etapas seguintes, o mesmo processo é repetido em cada um dos triângulos menores da etapa anterior.

Qual o número de trapézios na 6ª etapa de construção?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 8. Na situação apresentada nos quadrinhos a seguir, as distâncias, em quilômetros, d_{AB} , d_{BC} e d_{CD} formam, nesta ordem, os três primeiros termos de uma progressão aritmética.



Qual o valor do décimo terceiro termo dessa progressão?

Exercício 9. O triângulo aritmético de Fibonacci é formado pelos números ímpares inteiros positivos a partir do 1 dispostos em linhas com ordem crescente em cada linha e pulando para a linha seguinte. A linha n possui exatamente n números. Veja as quatro primeiras linhas.

Linha 1:	1
Linha 2:	3 5
Linha 3:	7 9 11
Linha 4:	13 15 17 19
	⋮

Em qual linha aparecerá o 2013?

Exercício 10. Sobre quantidade de múltiplos de um dado inteiro, responda

- a) Quantos múltiplos de 13 há entre 100 e 200?
- b) Quantos múltiplos de 17 há entre 1000 e 2000?

Exercício 11. Na progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$, sabe-se que $a_2 + a_5 = 9$ e $3a_5 - a_3 = 16$. Então, quanto vale $\frac{a_5}{a_2}$?

Exercício 12. Sabe-se que no triângulo ABC os lados estão em progressão aritmética de razão t . Qual a distância entre o incentro e o baricentro deste triângulo, em função de t ?

Exercício 13. Demonstre que se entre os infinitos termos de uma progressão aritmética de inteiros positivos existe um quadrado perfeito, então existem infinitos quadrados perfeitos na mesma progressão.

Respostas e Soluções.

1.

a) Se $a_1 = 2$ e $r = 3$, temos

$$\begin{aligned}a_2 &= a_1 + 3 = 5 \\a_3 &= a_2 + 3 = 8 \\a_4 &= a_3 + 3 = 11.\end{aligned}$$

b) Como $a_1 = -3$ e $a_5 = 17$, temos

$$\begin{aligned}a_5 &= a_1 + 4r \\17 &= -3 + 4r \\4r &= 20 \\r &= 5.\end{aligned}$$

c) (Adaptado do vestibular do IFPE – 2015)

Perceba que a diferença comum é igual a

$$15 - 3 = 27 - 15 = 39 - 27 = 12.$$

Assim, podemos escrever que

$$\begin{aligned}a_{36} &= 231 \\a_1 + 35 \cdot 12 &= 231 \\a_1 &= 231 - 420 = -189.\end{aligned}$$

e, daí

$$\begin{aligned}a_y &= 27 \\a_1 + (y - 1) \cdot 12 &= 27 \\-189 + 12y - 12 &= 27 \\12y &= 228 \\y &= 19.\end{aligned}$$

d) Sejam $a_1 = d$ e r a razão. Então, temos:

$$\begin{aligned}a_1 &= d, & a_2 &= d + r, & a_3 &= d + 2r, \\a_4 &= d + 3r, & a_5 &= d + 4r, & a_6 &= d + 5r, \\a_7 &= d + 6r, & a_8 &= d + 7r, & a_9 &= d + 8r, \\a_{10} &= d + 9r, & a_{11} &= d + 10r.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}a_4 + a_7 + a_{10} &= (d + 3r) + (d + 6r) + (d + 9r) \\217 &= 3(d + 6r). \\a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} &= (d + 4r) + (d + 5r) + \dots + (d + 10r) \\553 &= 7(d + 7r).\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{cases} d + 6r = 207/3 = 69, \\ d + 7r = 553/7 = 79. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema anterior, obtemos $r = 10$ e $d = 9$. Assim, $a_{11} = d + 10r = 109$.

2. Ao final de 182 dias Maria terá

$$\begin{aligned}a_{182} &= a_1 + 181 \cdot 3 \\a_{182} &= 2 + 181 \cdot 3 \\a_{182} &= 2 + 181 \cdot 3 = 545 \text{ reais.}\end{aligned}$$

3. (Adaptado do vestibular da UNIFOR – 2015)

Observe que a diferença comum vale 15 reais. Sendo assim, quem mora do 10º andar pagará

$$\begin{aligned}a_{10} &= a_1 + 9 \cdot 15 \\a_{10} &= 105 + 135 \\a_{10} &= 240 \text{ reais.}\end{aligned}$$

4. Observe que, de baixo para cima, a diferença comum vale (-2) cm. Sendo assim, o segundo degrau de cima para baixo é o mesmo que o penúltimo degrau de baixo para cima e ele mede

$$\begin{aligned}a_7 &= 45 + 6 \cdot (-2) \\a_7 &= 45 - 12 \\a_7 &= 33 \text{ cm.}\end{aligned}$$

5. Observe que a diferença comum d é igual a 5. Além disso, podemos escrever que $a_{20} = a_1 + 19d$, o que resulta em

$$\begin{aligned}a_{20} &= a_1 + 19d \\a_{20} &= 5 + 19 \cdot 5 \\a_{20} &= 100.\end{aligned}$$

6. Sejam a , b e c as medidas dos lados, $a < b < c$, e α o menor ângulo. Daí, podemos escrever que

$$\begin{aligned}b &= a + 1, \\c &= a + 2 \text{ e} \\2b &= a + c.\end{aligned}$$

Agora, aplicando a lei dos senos, temos que

$$\begin{aligned}\frac{c}{\sin(2\alpha)} &= \frac{a}{\sin \alpha} \\ \frac{c}{2 \sin \alpha \cos \alpha} &= \frac{a}{\sin \alpha} \\ \cos \alpha &= \frac{c}{2a}.\end{aligned}$$

Seguindo para a lei dos cossenos, chegaremos a

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \\a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \left(\frac{c}{2a}\right) \\a^3 &= b^2a + c^2a - bc^2 \\a^3 &= (a + 1)^2 \cdot a + (a + 2)^2 \cdot a - (a + 1)(a + 2)^2 \\a^2 - 3a - 4 &= 0,\end{aligned}$$

o que resulta como soluções em $a = -1$, que não convém, e $a = 4$. Donde concluímos $a = 4$, $b = 5$ e $c = 6$.

7. (Adaptado do vestibular da UFRGS – 2015)

A percepção da sequência agora é um pouco mais difícil, pois cada novo termo contará com o mesmo valor do anterior mais o novo trapézio mais o número de trapézios individuais (sem composição de figuras) da etapa anterior, que chamaremos de t_i , com o índice i em referência à posição anterior à calculada. Sendo assim, perceba que Assim, podemos escrever que

$$\begin{aligned}a_1 &= 0 \\a_2 &= a_1 + 1 + t_1 = 1 \\a_3 &= a_2 + 1 + t_2 = 3 \\a_4 &= a_3 + 1 + t_3 = 6 \\a_5 &= a_4 + 1 + t_4 = 10 \\a_6 &= a_5 + 1 + t_5 = 15.\end{aligned}$$

8. (Adaptado do vestibular da UERJ – 2015)

Considere $d_{AB} = x$, $d_{BC} = y$ e $d_{CD} = z$ e poderemos arrumar do enunciado que

$$\begin{aligned}x &= y + 10 \\y &= z + 10 \\d_{AD} &= x + y + z = 390 \text{ km.}\end{aligned}$$

O que permite escrevermos

$$\begin{aligned}x + y + z &= 390 \\z + 20 + z + 10 + z &= 390 \\3z &= 360 \\z &= 120 \text{ km.}\end{aligned}$$

Assim, podemos escrever a P.A. (140, 130, 120) e décimo terceiro termo é

$$\begin{aligned}a_{13} &= a_1 + 12d \\a_{13} &= 140 + 12 \cdot (-10) \\a_{13} &= 20.\end{aligned}$$

9. (Adaptado da OBM – 2013)

Note que na linha k aparecem exatamente os k ímpares que ainda não estão nas linhas anteriores e que o último número ímpar de uma linha j qualquer é o $\left[\frac{j \cdot (j+1)}{2}\right]$ -ésimo ímpar. Dessa forma, temos que os k ímpares da linha k estão compreendidos no intervalo de $\left[\frac{(k-1) \cdot k}{2} + 1\right]$ até $\left[\frac{(k+1) \cdot k}{2}\right]$. Como 2013 é o 1007º ímpar, para encontrarmos sua linha, devemos encontrar k inteiro que satisfaça:

$$\frac{(k-1) \cdot k}{2} + 1 < 1007 < \frac{(k+1) \cdot k}{2}.$$

A primeira desigualdade implica $(k-1)^2 < 2 \cdot 1006$, ou seja, $k < \sqrt{2012} + 1 < 46$. A segunda desigualdade implica $\frac{8057}{4} < \left(k + \frac{1}{2}\right)^2$ e, conseqüentemente, $\frac{\sqrt{8057}}{2} - \frac{1}{2} < k$. O único inteiro nesse intervalo é $k = 45$.

10. (Adaptado do vestibular da PUC RJ – 2015)

Para encontrar os primeiro e último termos das sequências, basta dividirmos os valores e observamos os restos.

a) Ao dividir 100 por 13 obtemos como o resto 9, então faltam 4 unidades para o próximo múltiplo de 13 que é o 104. Aplicando lógica semelhante com o 200 obtemos resto 5, agora temos que olhar o múltiplo anterior (afinal, o posterior não pertence ao intervalo definido), o último então é o 195. Assim, podemos escrever $a_1 = 104$, $d = 13$, $a_n = 195$. Daí,

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 + (n-1)d \\195 &= 104 + (n-1) \cdot 13 \\15 &= 8 + (n-1) \cdot 1 \\7 &= n-1 \\n &= 8.\end{aligned}$$

b) Ao dividir 1000 por 17 obtemos como o resto 14, então faltam 3 unidades para o próximo múltiplo de 17 que é o 1003. Aplicando argumento semelhante com o 2000 obtemos resto 11. Agora temos que olhar o múltiplo anterior (afinal, o posterior não pertence ao intervalo definido), o último então é o 1989. Assim, podemos escrever $a_1 = 1003$, $d = 17$, $a_n = 1989$. Daí,

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 + (n-1)d \\1989 &= 1003 + (n-1) \cdot 17 \\117 &= 59 + (n-1) \cdot 17 \\58 &= n-1 \\n &= 59.\end{aligned}$$

11. (Adaptado do vestibular da USP – 2014)

Podemos escrever $a_2 + a_5 = 9$ e $3a_5 - a_3 = 16$ como um sistema em função de $a_1 = x$ e diferença comum d :

$$\begin{aligned}a_1 + d + a_1 + 4d &= 9 \\3 \cdot (a_1 + 4d) - a_1 - 2d &= 16\end{aligned}$$

o que resulta em

$$\begin{aligned}2x + 5d &= 9 \\2x + 10d &= 16,\end{aligned}$$

chegando a $x = a_1 = 1$ e $d = \frac{7}{5}$. Por fim,

$$\begin{aligned}\frac{a_5}{a_2} &= \frac{a_1 + 4d}{a_1 + d} \\&= \frac{1 + 4 \cdot \frac{7}{5}}{1 + \frac{7}{5}} \\&= \frac{33}{12} = \frac{11}{4}.\end{aligned}$$

12. (Adaptado da OBM)

Sejam $(AB, AC, BC) = (b-t, b, b+t)$ a progressão aritmética de razão t , G o baricentro de ABC , I o incentro de ABC e $r = d_{\{I,AC\}} = d_{\{I,AB\}} = d_{\{I,BC\}}$ o inraio de ABC .

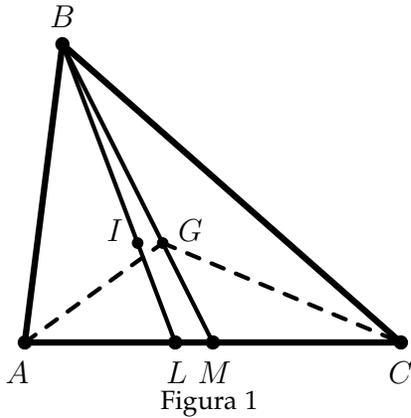


Figura 1

Como $GM = \frac{BM}{3}$, temos a área do $\triangle AGC$ um terço da área de $\triangle ABC$. Sendo assim, chegamos a

$$S_{\triangle ABC} = \frac{r(b-t+b+b+t)}{2} = \frac{3br}{2};$$

$$S_{\triangle AGC} = \frac{S_{\triangle ABC}}{3} = \frac{br}{2};$$

$$S_{\triangle AGC} = \frac{AC \cdot d_{\{G,AC\}}}{2};$$

$$d_{\{G,AC\}} = r; \text{ e } d_{\{G,AC\}} = d_{\{I,AC\}}.$$

Portanto, as distâncias de I e G a AC são iguais, o que prova que GI é paralelo a AC , logo:

- como BL a bissetriz de $\hat{A}BC$ e M o ponto médio de AC , temos $AM = \frac{b}{2}$ e, pelo teorema da bissetriz interna ¹, obtemos

$$\frac{AL}{AB} = \frac{LC}{BC} = \frac{AL+LC}{AB+BC}$$

$$\frac{AL}{AB} = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2}$$

$$2 \cdot AL = AB$$

$$AL = \frac{b-t}{2}.$$

$$\text{Assim, } LM = AM - AL = \frac{b}{2} - \frac{b-t}{2} = \frac{t}{2}.$$

- os triângulos BLM e BIG são semelhantes, com

$$\frac{IG}{LM} = \frac{BG}{BM} = \frac{2}{3}$$

$$IG = \frac{2}{3} \cdot LM$$

$$IG = \frac{2}{3} \cdot \frac{t}{2} = \frac{t}{3}.$$

13. (Extraído da Olimpíada da Espanha)

Seja r a razão de modo que tenhamos $x^2 = a_0 + kr$. Agora tome $(x+r)^2$.

$$\begin{aligned} (x+r)^2 &= x^2 + (2xr + r^2) \\ &= a_0 + kr + (2xr + r^2) \\ &= a_0 + (k + 2x + r)r. \end{aligned}$$

Note que achamos um novo quadrado perfeito maior que o anterior que pertence também a mesma P.A. Analogamente, podemos afirmar que $(x+2r)^2$ pertence a mesma P.A. e, repetindo o argumento, todos os termos $(x+nr)^2$ são quadrados perfeitos que pertencem a P.A. ■

ELABORADO POR TIAGO MIRANDA E CLEBER ASSIS
 PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
 CONTATO@CURSOARQUIMEDES.COM

¹Também conhecido informalmente como Teorema da Bailarina.