Módulo de Elementos básicos de geometria plana

Conceitos Geométricos Básicos

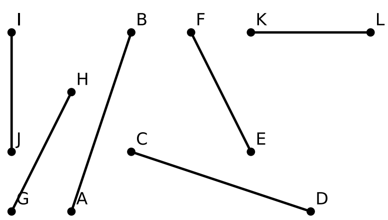
Oitavo ano

Problemas dos Círculos Matemáticos - Capítulo 4

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Dados quatro pontos distintos A, B, C e D, todos sobre uma mesma reta como indica a figura abaixo, determine o número de segmentos distintos que podem ser formados com vértices em tais pontos.

Exercício 2. Usando o compasso, determine na figura abaixo quais segmentos são congruentes.



Exercício 3. Determine o único item verdadeiro.

a) Se dois segmentos são consecutivos, então eles são colineares.

b) Se dois segmentos são adjacentes, então eles são consecutivos.

c) Se dois segmentos são congruentes, então eles são colineares.

d) Se dois segmentos são colineares, então eles são consecutivos.

e) Dois segmentos consecutivos e congruentes sempre são colineares.

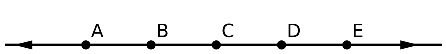
Exercício 4. Sabendo que o segmento AB mede $20cm$, determine o comprimento do segmento AC nos seguintes casos:

a) Quando $CB = 8cm$.

b) Quando $AC - CB = 1cm$.

c) Se $AC = 2x$ e $CB = x - 1$.

Exercício 5. Abaixo estão representados cinco pontos distintos sobre uma mesma reta. Quantas semirretas possuem origem em algum desses cinco pontos e não contêm o vértice B?



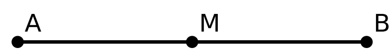
Exercício 6. Seja M o ponto médio de AB. Se $AM = 2x - 5$ e $MB = x + 7$, encontre o valor de x.

Exercício 7. Os pontos A, B e P são distintos e estão sobre uma mesma reta com A situado à esquerda de B. Se $PA > AB$ e $PB < AB$, o que podemos dizer sobre a ordem dos três pontos na reta?

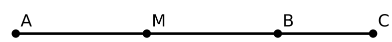
Exercício 8. Existem quatro pontos consecutivos A, B, C e D sobre uma reta. Se $AD = 2BC$ e $AB + CD = 20$, determine o valor de AD.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 9. Seja M o ponto médio de AB. Se $AM = 7x - 1$ e $MB = x + 11$, encontre o valor de x.



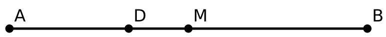
Exercício 10. No desenho abaixo, M é o ponto médio de AB. Se $AM = x$, $BC = x - 1$ e $AC = 4x - 9$, determine o comprimento de AB



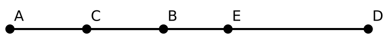
Exercício 11. Os pontos A, B e C são colineares com $AB = 30cm$ e $BC = 10cm$. Determine os possíveis valores de AC.

Exercício 12. Dados quatro pontos consecutivos A, B, C e D sobre uma mesma reta tais que $AB \cdot BD = AC \cdot CD$. Se $AB = 9cm$, encontre o valor de CD.

Exercício 13. No desenho abaixo, M é o ponto médio do segmento AB. Se $DB - DA = 10cm$, determine o comprimento de DM.



Exercício 14. No desenho abaixo, C é o ponto médio de AB e E é o ponto médio de CD. Sabendo que $AB + ED - AC = 30cm$, determine o comprimento de AE.



Exercício 15. Em uma reta se encontram os quatro pontos consecutivos A, B, C e D com $AB = AC - 3$, $AB + CD = 4$ e que satisfazem a seguinte relação:

$$3AB - BD - 2CD = 3.$$

Determine as medidas dos comprimentos de AD e AB.

Exercício 16. Os pontos A, B, C e D estão sobre uma mesma reta e são consecutivos. Sabendo que $BC = CD$ e que $AC \cdot BC = 40$, determine o valor de $AD^2 - AB^2$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 17. Sejam M e N os pontos médios, respectivamente, dos segmentos AB e BC, contidos numa mesma reta de modo que $AB = BC$, com $A \neq C$. É sempre verdade que MN é congruente a AB? Justifique.

Exercício 18. João deseja construir um circuito para o seu trem de brinquedo usando trilhos no formato de segmentos de reta de comprimento fixo. Na interseção de dois trilhos, ele precisa colocar uma peça para que o trem mude sua direção. É possível João construir um circuito fechado com exatamente 10 trilhos e de forma que cada trilho possua exatamente 4 tais peças?

Exercício 19. a) São dados 3 pontos escolhidos sobre a reta surpote de AB, todos fora do segmento de reta AB. É possível que a soma das distâncias desses pontos ao vértice A seja igual à soma das distâncias desses pontos ao vértice B?

b) Se fossem 1001 pontos ao invés de três, seria possível que a soma das distâncias desses pontos ao vértice A fosse igual à soma das distâncias desses pontos ao vértice B?

Exercício 20. Em um tabuleiro 5×5, João deve desenhar segmentos de reta ligando vértices opostos dos quadrados 1×1 de modo que quaisquer dois segmentos desenhados não possuam pontos em comum (incluindo seus vértices). Qual o número máximo de tais segmentos que podem ser desenhados por João?

Exercício 21. a) Em quantas partes distintas três retas dividem um plano se não existem duas delas paralelas e também não existem três coincidentes?

b) Em quantas partes distintas cinco retas dividem um plano se não existem duas delas paralelas e também não existem três coincidentes?

Você conseguiria estipular uma fórmula geral para o mesmo problema envolvendo n retas?

Respostas e Soluções.

1. Existem 6 segmentos de reta com vértices nesses 4 pontos: AB, AC, AD, BC, BD e CD. Veja que a resposta não seria diferente se os pontos não fossem colineares.

2. Temos $IJ = KL$, $GH = FE$ e $AB = CD$.

3. Resposta B.

4.

a) Como $AC + CB = 20cm$, se $CB = 8cm$ temos $AC = 12cm$.

b) Somando $AC + CB = 20cm$ com $AC - CB = 1cm$, temos $2AC = 21cm$. Portanto, $AC = \dfrac{21}{2}$.

c) Temos $20 = AC + CB = 2x + (x - 1)$. Portanto, $x = 7$ e $AC = 2x = 14$.

5. Com a exceção do ponto B, por qualquer um dos outros pontos, existe exatamente uma semirreta que satisfaz a condição do enunciado. Portanto, existem 4 semirretas.

6. Como $AM = MB$, temos $2x - 5 = x + 7$, ou seja, $x = 2x - x = 7 + 5 = 12$.

7. Se o ponto P se encontra à esquerda de A, o segmento PB é a soma de PA e AB e consequentemente maior que AB. Se o ponto P se encontra entre A e B, o comprimento de PA é estritamente menor que o comprimento de AB. Consequentemente, a única possibilidade é P estar situado à direita de B. O exemplo abaixo mostra que tal configuração é admissível.

8. Sejam $AB = x$ e $CD = y$. Como

$$2BC = AD = AB + BC + CD = 20 + BC,$$

temos $BC = 20$ e consequentemente $AD = 40$.

9. Como $AM = MB$, temos $7x - 1 = x + 11$, ou seja, $6x = 12$ e consequentemente $x = 2$.

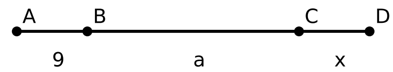
10. Como $AM = MB$, temos $AB = 2x$. Consequentemente:

$$4x - 9 = AC = AB + BC = 2x + x - 1.$$

Isso produz: $x = 9 - 1 = 8$. Portanto, $AB = 2x = 16$.

11. Não podemos ter o vértice A entre B e C pois $BC < AB$. Assim, A está situado à esquerda ou à direita do segmento BC. Quando A está mais próximo de C, o segmento AC mede $AB - BC = 20cm$. Quando A está mais próximo de B, o segmento AC mede $AB + BC = 40cm$.

12. Considere o desenho abaixo:



Sejam $BC = a$ e $CD = x$. Assim,

$$\begin{aligned} AB \cdot BD &= AC \cdot CD \\ 9(a + x) &= (9 + a)x \\ 9a + 9x &= 9x + ax \\ 9a &= ax \\ 9 &= x. \end{aligned}$$

Portanto, o comprimento de CD é $9cm$.

13. Sejam $AM = MB = x$ e $DM = y$. Temos:

$$\begin{aligned} 10 &= DB - DA \\ &= (x + y) - (x - y) \\ &= 2y. \end{aligned}$$

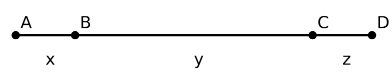
Portanto, $y = 5cm$.

14. Sejam $AC = CB = x$ e $AE = y$. Então $CE = ED = y - x$ e

$$\begin{aligned} 30 &= AB + ED - AC \\ &= (2x) + (y - x) - (x) \\ &= y \end{aligned}$$

Portanto, $AE = 30cm$.

15. Considere o desenho abaixo:



Sejam $AB = x$, $BC = y$ e $CD = z$. Temos $y = AC - AB = 3$. Além disso,

$$\begin{aligned} 3 &= 3AB - BD - 2CD \\ &= 3x - (3 + z) - 2z \\ &= 3x - 3z - 3 \Rightarrow \\ 6 &= 3x - 3z. \end{aligned}$$

Também temos $12 = 3AB + 3CD = 3x + 3z$. Somando com a última equação, obtemos $18 = 6x$. Portanto, $x = 3$ e $z = 4 - 3 = 1$. Finalmente, $AD = AB + BC + CD = 3 + 3 + 1 = 7$.

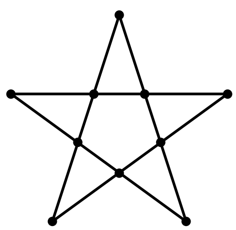
16. Sejam $AB = x$ e $BC = CD = y$. Assim,

$$\begin{aligned} AD^2 - AB^2 &= (AD - AB)(AD + AB) \\ &= (2y)(2x + 2y) \\ &= 4y(x + y) \\ &= 4BC \cdot AC \\ &= 160. \end{aligned}$$

17. Sim. Veja que:

$$\begin{aligned} MN &= MB + NB \\ &= \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} \\ &= \frac{AB}{2} + \frac{AB}{2} \\ &= AB. \end{aligned}$$

18. Sim, é possível. No exemplo abaixo, os pontos pretos simbolizam as estações e os segmentos, os trilhos.



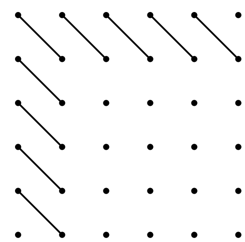
19.

a) Se todos os três pontos estão ambos à esquerda de A ou ambos à direita de B, a soma das distâncias dos três pontos a um desses vértices é estritamente maior do que a soma das distâncias ao outro vértice. Precisamos realmente estudar o caso em que existem dois deles de um lado e um do outro como indica a figura. Calculemos a diferença entre a soma das distâncias ao vértice A e a soma das distâncias ao vértice B.

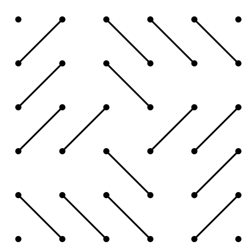
$$\begin{aligned} (XA + YA + ZA) - (XB + YB + ZB) &= \\ (XA - XB) + (YA - YB) + (ZA - ZB) &= \\ (-AB) + (-AB) + (AB) &= \\ -AB &\neq 0. \end{aligned}$$

b) Sejam S_A e S_B as somas das distâncias de todos os pontos ao vértice A e ao vértice B, respectivamente. Analisemos a contribuição de um ponto X na diferença $S_A - S_B$. Quando X está à esquerda de A, a contribuição é $XA - XB = -AB$ e quando X está à direita de B a contribuição é $XA - XB = AB$. Ou seja, alguns pontos vão contribuir com o valor $+AB$ e outros com o valor $-AB$. Para que a diferença seja zero, a quantidade de parcelas com o sinal "$+$" deve ser igual à quantidade de parcelas com o sinal "$-$". Como 1001 é um número ímpar, tal igualdade não pode ocorrer.

20. (Extraído do Torneio das Cidades) Os 25 quadradinhos determinam $6 \times 6 = 36$ vértices. Como cada segmento deve usar dois deles, podemos concluir inicialmente que João não pode desenhar mais que $\frac{36}{2} = 18$ segmentos. Analisando um lado qualquer do quadrado maior, não é possível que os 6 vértices sejam usados. Assim, eliminando-se um vértice do lado superior e um vértice do lado inferior, teremos apenas 34 vértices utilizáveis e consequentemente não mais que $\frac{34}{2} = 17$ segmentos. Essa ainda não é a melhor estimativa. Para que apenas dois vértices dos lados mencionados anteriormente não sejam usados, deve ocorrer a configuração exibida na próxima figura:

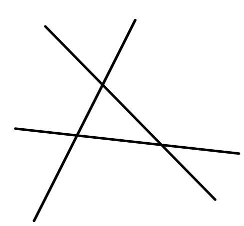


Note que não é possível desenhar segmentos usando os vértices do lado inferior sem deixar de usar pelo menos mais um vértice de tal lado. Logo, não poderemos usar pelo menos 3 vértices. Como o número de vértices usados deve ser um número par, no máximo utilizaremos 32 deles e assim teremos não mais que $\frac{32}{2} = 16$ segmentos desenhados. O exemplo abaixo mostra que tal número é realizável.

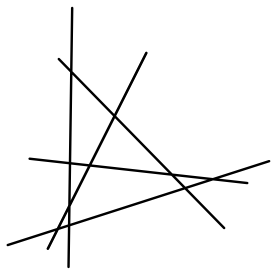


21.

a) Para três retas, temos 7 regiões como indica a próxima figura.



b) Para cinco retas, temos 16 regiões. Analisando a configuração com três retas, podemos notar que a quarta reta cria 4 novas regiões ao intersectar as retas que já estavam traçadas. A quinta reta gera mais 5 regiões ao intersectar as outras quatro.



Como não existem duas retas paralelas e nem três concorrentes, se já estão traçadas k retas, uma nova reta acrescentaria mais $k+1$ regiões porque ela dividirá em duas $k+1$ regiões que já existiam. Assim, $n+1$ retas obedecendo as condições do enunciado dividem o plano em:

$$1+(1+2+\ldots+n) = 1+\frac{n(n+1)}{2}.$$

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com