Cônicas

Exercícios - Parte I

3° ano E.M.

Material elaborado por Lorena Bulhosa

Cônicas
Exercícios - Parte I

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Reduza as equações das cônicas à forma canônica e identifique-as.

a) $4x^2 - y^2 - 24x - 4y + 31 = 0$

b) $9x^2 + 16y^2 - 96y = 0$

c) $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0$

d) $x^2 - 4y^2 - 4x + 8y = 0$

e) $y^2 + x - 8y + 6 = 0$.

Exercício 2. Considere as curvas

$$C_1 : x^2 - 10x + y + 28 = 0$$
$$C_2 : x^2 - y^2 - 4x = 0$$
$$C_3 : x^2 + 9y^2 + 2x - 18y - 71 = 0.$$

Classifique-as e determine seus elementos principais.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 3. Determine a equação da elipse que

a) tem focos $(0,3)$ e $(0,2)$ e excentricidade $2/5$.

b) tem centro na origem, um dos vértices sobre a reta focal é $(4,0)$ e passa por $(2,\sqrt{3})$.

Exercício 4. Uma hipérbole $\mathcal{H}$ tem centro $(1,2)$, distância entre os focos igual a 10 e vértices imaginários $(1,5)$ e $(1,-1)$. Determine a equação de $\mathcal{H}$.

Exercício 5. Sejam $V = (3,5)$ o vértice de uma parábola $\mathcal{P}$ e $d : y - 2 = 0$ sua diretriz. Ache a equação da parábola e seu foco.

Exercício 6. Esboce a região do plano determinada pelas equações a seguir.

a) $y^2 + x - 6y + 9 \leq 0$

b) $-4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y - 43 \leq 0$

c) $x^2 + 4y^2 + 8x + 12 > 0$

Exercício 7. Represente a região do plano definida pelos pontos que são soluções do sistema

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 2x + 24y + 33 < 0 \\ x^2 - y^2 + 2x - 6y - 9 < 0. \end{cases}$$

Exercício 8. Esboce a região dada pelo sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 6x \geq 0 \\ |x| \leq 5. \end{cases}$$

Exercício 9. Represente a região do plano definida pelos pontos que são soluções do sistema

$$\begin{cases} 9x^2 + 4y^2 + 18x + 16y - 11 < 0 \\ 2x^2 + 4x - y > 0. \end{cases}$$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 10. Determine a equação da família de elipses com centro $(2,3)$, reta focal paralela ao eixo Ox e excentricidade $e = \frac{1}{2}$.

Exercício 11. Uma hipérbole tem vértices $(0,3)$ e $(0,-3)$, e um de seus focos é o ponto $(0,5)$. Determine a equação da hipérbole e suas assíntotas.

Exercício 12. Sejam $F = (-3,-3)$ o foco de uma parábola com diretriz sobre o eixo Oy. Ache a equação da parábola.

Exercício 13. Esboce o conjunto dos pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x^2 + y^2 - 4|x| - 4y = 4$.

Exercício 14. Faça um esboço do conjunto dos pontos do plano que satisfazem a inequação

$$(9x^2 + y^2 - 54x + 72)(x - y^2 - 2) > 0.$$

Exercício 15. Faça um esboço da região do plano dada pelo sistema

$$\begin{cases} x^2 + 9y^2 - 2x - 18y + 1 \geq 0 \\ x^2 - y^2 - 2x + 2y + 4 \geq 0 \\ x \geq 1. \end{cases}$$

Respostas e Soluções.

1. a)

$$\begin{aligned}
&4x^2 - y^2 - 24x - 4y + 31 = 0 \Leftrightarrow\\
&4(x^2 - 6x) - (y^2 + 4y) + 31 = 0 \Leftrightarrow\\
&4[(x-3)^2 - 9] - [(y+2)^2 - 4] + 31 = 0 \Leftrightarrow\\
&4(x-3)^2 - 36 - (y+2)^2 + 4 + 31 = 0 \Leftrightarrow\\
&4(x-3)^2 - (y+2)^2 = 1 \Leftrightarrow\\
&\frac{(x-3)^2}{1/4} - (y+2)^2 = 1.
\end{aligned}$$

A cônica é uma hipérbole.

b)

$$\begin{aligned}
&9x^2 + 16y^2 - 96y = 0 \Leftrightarrow\\
&9x^2 + 16(y^2 - 6y) = 0 \Leftrightarrow\\
&9x^2 + 16[(y-3)^2 - 9] = 0 \Leftrightarrow\\
&9x^2 + 16(y-3)^2 - 144 = 0 \Leftrightarrow\\
&\frac{x^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1.
\end{aligned}$$

A cônica é uma elipse.

c)

$$\begin{aligned}
&4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0 \Leftrightarrow\\
&4(x^2 - 4x) - 9(y^2 - 2y) - 29 = 0 \Leftrightarrow\\
&4[(x-2)^2 - 4] - 9[(y-1)^2 - 1] - 29 = 0 \Leftrightarrow\\
&4(x-2)^2 - 16 - 9(y-1)^2 + 9 - 29 = 0 \Leftrightarrow\\
&4(x-2)^2 - 9(y-1)^2 = 36 \Leftrightarrow\\
&\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1.
\end{aligned}$$

A cônica é uma hipérbole.

d)

$$\begin{aligned}
&x^2 - 4y^2 - 4x + 8y = 0 \Leftrightarrow\\
&[(x-2)^2 - 4] - 4[(y-1)^2 - 1] = 0 \Leftrightarrow\\
&(x-2)^2 - 4 - 4(y-1)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow\\
&(x-2)^2 - 4(y-1)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Note que apesar do sinal negativo entre os binômios quadrados, não tem como transformar essa equação na equação de uma hipérbole. Continuando a resolver temos

$$\begin{aligned}
&(x-2)^2 = 4(y-1)^2 \Leftrightarrow\\
&x - 2 = \pm 2(y-1) \Leftrightarrow\\
&y = \frac{x}{2} \text{ ou } y = -\frac{x}{2} + 2,
\end{aligned}$$

que são duas retas concorrentes.

e)

$$\begin{aligned}
&y^2 + x - 8y + 6 = 0 \Leftrightarrow\\
&(y-4)^2 - 16 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow\\
&(y-4)^2 + x - 10 = 0 \Leftrightarrow\\
&x - 10 = -(y-4)^2.
\end{aligned}$$

A cônica é uma parábola.

2. Completando o quadrado, a equação de C_1 na forma canônica é $y + 3 = -(x-5)^2$. Logo, C_1 é uma parábola com diretriz paralela ao eixo Ox, concavidade voltada para baixo, vértice $V = (5, -3)$, $4p = 1$, ou seja, $p = 1/4$. O foco F é $(5, -3 - p) = (5, -13/4)$ e a diretriz $d : y = -3 + p = -11/4$.

Completando os quadrados, a equação de C_2 na forma canônica é $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$. Logo, C_2 é uma hipérbole de centro $C = (2, 0)$ e com eixo real sobre o eixo Ox. Temos $a^2 = b^2 = 4$, assim $a = b = 2$. A relação $c^2 = a^2 + b^2$ implica $c = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Assim, o comprimento do eixo real é $\overline{V_1V_2} = 2a = 4$, o do eixo imaginário é $\overline{B_1B_2} = 2b = 4$ e a distância focal é $\overline{F_1F_2} = 2c = 4\sqrt{2}$. Os vértices são os pontos $A_1 = (0, 0)$ e $A_2 = (4, 0)$, os focos são os pontos $F_1 = (2 - 2\sqrt{2}, 0)$ e $F_2 = (2 + 2\sqrt{2}, 0)$. Sua excentricidade é $e = c/a = \sqrt{2}$.

Completando os quadrados, a equação de C_3 na forma canônica é $\frac{(x+1)^2}{81} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$. Logo, a curva é uma elipse de centro $C = (-1, 1)$ e eixo maior paralelo ao eixo Ox. Temos que $a^2 = 81$ e $b^2 = 9$ implicam $a = 9$ e $b = 3$. A relação $c^2 = a^2 - b^2$ implica $c = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$. O comprimento do eixo maior é $2a = 18$, o do eixo menor é $2b = 6$ e a distância focal é $\overline{F_1F_2} = 2c = 12\sqrt{2}$. Os focos são $F_1 = (-1 - 6\sqrt{2}, 1)$ e $F_2 = (-1 + 6\sqrt{2}, 1)$. Por fim, sua excentricidade é $e = c/a = 2\sqrt{2}/3$.

3. a) A reta focal está sobre o eixo Oy e o centro $C = (x_0, y_0)$ é dado por

$$(x_0, y_0) = \frac{(0,3) + (0,2)}{2} = (0, 5/2).$$

A distância do centro aos focos é $c = d(C, F_1) = d(C, F_2) = 1/2$. Como a excentricidade é $e = c/a = 2/5$ e $c = 1/2$, então $a = 5/4$. Da relação $a^2 = c^2 + b^2$ temos $b^2 = 21/16$. Logo

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{21/16} + \frac{(y - 5/2)^2}{25/16} = 1.$$

b) Como $C = (0, 0)$ e $V_1 = (4, 0)$ está sobre a reta focal, então a reta focal está sobre o eixo Ox e $a = d(C, V_1) = 4$. A elipse tem equação

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Como o ponto $(2, \sqrt{3})$ pertence a elipse, substituindo suas coordenadas temos $b = 2$. Assim, a equação da elipse é

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

4. A distância entre os vértices imaginários é $2b = 6$, logo $b = 3$. A distância entre os focos é $2c = 10$, logo $c = 5$. Da relação $c^2 = a^2 + b^2$, temos $a = 4$. A hipérbole tem reta focal paralela ao eixo Ox. Assim, sua equação é

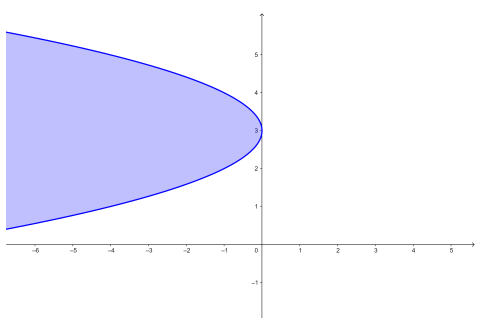
$$\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1.$$

5. A diretriz de $\mathcal{P}$ é paralela ao eixo Ox e o vértice está acima da diretriz, logo a parábola tem concavidade voltada para cima. O parâmetro $p = d(V, d) = 3$. Assim, a equação de $\mathcal{P}$ é

$$y - 5 = \frac{1}{12}(x-3)^2.$$

Seu foco é $F = (3, 5 - p) = (3, 2)$.

6. a) Note que $y^2 + x - 6y + 9 \leq 0$ equivale a $(y-3)^2 + x \leq 0$. Resolvendo primeiramente o caso em que temos igualdade na inequação, obtemos a parábola $x = -(y-3)^2$, que possui concavidade para esquerda e cujo vértice é o ponto $(0, 3)$.Para esboçar a parábola, calculamos o ponto em que ela cruza o eixo Oy obtendo $(-9, 0)$. Agora, como estamos interessados na região em que a inequação é satisfeita, dado um ponto da parábola se diminuirmos o valor de x ainda iremos satisfazer essa inequação. Sendo assim, a região procurada corresponde à parábola juntamente com a região sombreada (em azul) da figura. Dê um zoom para melhorar a visualização.



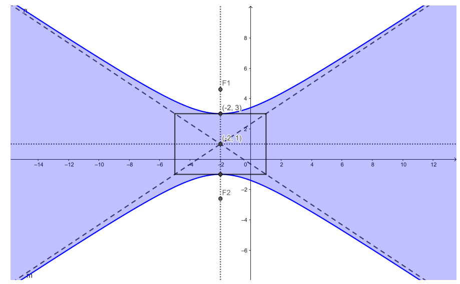
b) Note, completando os quadrados, que $-4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y - 43 \leq 0$ equivale a

$$\frac{(y-1)^2}{4} - \frac{(x+2)^2}{9} \leq 1.$$

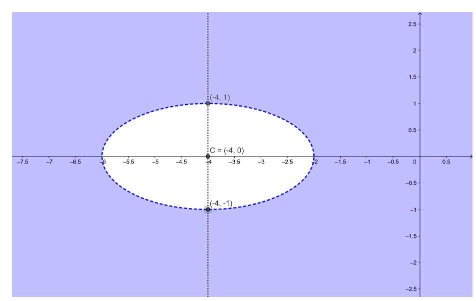
Resolvendo primeiramente o caso em que temos igualdade na inequação, obtemos uma hipérbole com centro $C = (-2, 1)$ e reta focal paralela ao eixo Oy. Temos que $a = 2$ e $b = 3$. Então, desenhamos um retângulo que tem como centro o ponto C e lados de comprimentos $2a$ e $2b$. As diagonais desse retângulo estão contidas nas assíntotas da hipérbole (as retas pontilhadas na figura abaixo). Vamos determinar quais pontos (x, y) satisfazem a inequação original,

$$\frac{(y-1)^2}{4} \leq 1 + \frac{(x+2)^2}{9}.$$

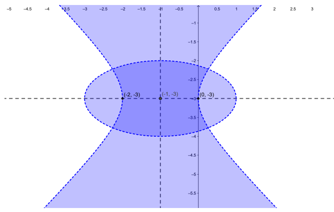
Veja que para cada ponto sobre a hipérbole temos igualdade nessa inequação. Por outro lado, partindo de um desses pontos precisamos diminuir o valor absoluto de $(y-1)$, isto é, a distância do ponto à reta $y = 1$, para a desigualdade continuar valendo. Assim, dado um ponto (x, y) sobre a hipérbole, qualquer ponto (x, t) tal que $|t-1| < |y-1|$ satisfaz a desigualdade, além dos pontos da propria hipérbole.

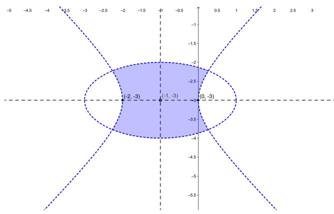


c) Note que $x^2 + 4y^2 + 8x + 12 > 0$ equivale a $\frac{(x+4)^2}{4} + y^2 > 1$. Resolvendo no caso em que temos uma igualdade no lugar da inequação, obtemos uma elipse com centro $C = (-4, 0)$, eixo maior de tamanho 4 e eixo menor de tamanho 2. Veja que, quando movemos um ponto (x, y) dessa elipse ao longo da reta que passa também pelo centro C, para mais longe de C, pelo menos um dos valores absolutos entre $|x+4|$ e $|y|$ aumenta, de modo que passa a valer a inequação. Sendo assim, os pontos que satisfazem a inequação original são aqueles que estão no exterior da elipse (veja a figura abaixo). Os pontos da elipse não fazem parte da região desejada, por isso ela está pontilhada.

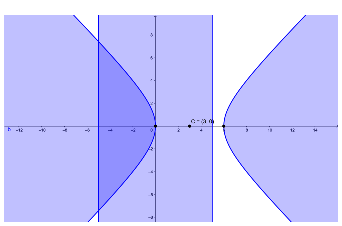


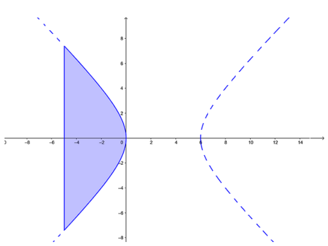
7. Como na questão anterior, note que ambas inequações possuem uma fronteira delimitada por uma cônica. A primeira delas equivale a $\frac{(x+1)^2}{4} + (y+3)^2 < 1$ e a segunda a $(x+1)^2 - (y+3)^2 < 1$. Se fosse uma igualdade na primeira inequação teríamos uma elipse com centro $C = (-1, -3)$, eixo maior de tamanho 4 e eixo menor de tamanho 2. Quando movemos um ponto (x, y) dessa elipse ao longo da reta que passa também pelo centro C, para mais perto de C, pelo menos um dos valores entre $(x+1)^2$ e $(y+3)^2$ diminui, de modo que passa a valer a inequação. Sendo assim, os pontos que satisfazem a desigualdade original são aqueles que estão no interior da elipse. Os pontos da elipse não satisfazem a inequação. Já na segunda inequação, trocando a desigualdade por uma igualdade temos uma hipérbole. Ela tem o mesmo centro que a elipse, reta focal paralela ao eixo Ox e vértices $(-2, -3)$ e $(0, -3)$. Para cada ponto sobre a hipérbole temos igualdade nessa inequação. Reescrevendo a inequação como $(x+1)^2 < 1 + (y+3)^2$, partindo de um desses pontos da hipérbole, precisamos diminuir o valor absoluto de $(x+1)$, isto é, a distância do ponto à reta $x = -1$, para a desigualdade continuar valendo. Assim, dado um ponto (x, y) sobre a hipérbole, qualquer ponto (t, y) tal que $|t+1| < |x+1|$ satisfaz a desigualdade. Os pontos da própria hipérbole não satisfazem. Desenhamos no mesmo plano as áreas correspondentes às inequações pintadas em azul. A solução do sistema é a interseção das duas áreas, a qual aparece em tom mais forte pela sobreposição. Na segunda figura visualizamos apenas a solução.



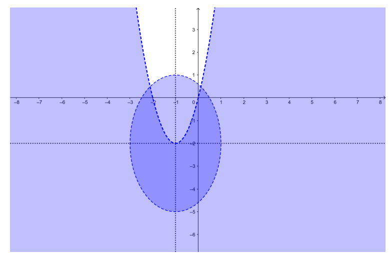


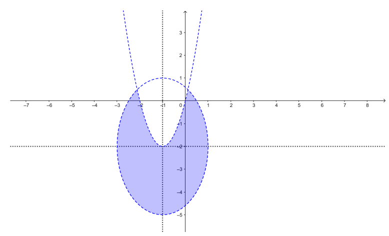
8. A primeira inequação equivale a $\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{y^2}{9} \geq 1$. Considerando apenas a igualdade temos a equação de uma hipérbole centrada em $(3,0)$, com reta focal paralela ao eixo Ox e vértices $(0,0)$ e $(6,0)$. Reescrevendo a inequação como $(x-3)^2 < 9 + y^2$, partindo de um dos pontos da hipérbole precisamos aumentar o valor absoluto de $(x-3)$, isto é, aumentar a distância do ponto à reta $x = 3$, para a desigualdade continuar valendo. Assim, dado um ponto (x,y) sobre a hipérbole, qualquer ponto (t,y) tal que $|t-3| > |x-3|$ satisfaz a desigualdade. Os pontos da própria hipérbole também satisfazem. Já a outra desigualdade representa uma faixa englobando todos os pontos que têm abscissa de módulo no máximo 5. As duas inequações estão representadas no mesmo plano abaixo. A parte mais escura do azul é a interseção entre as duas regiões, solução do sistema, a qual é isolada na figura seguinte.





9. A primeira inequação equivale a $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} < 1$. Trocando a desigualdade por uma igualdade temos uma elipse centrada em $(-1,-2)$, com eixo maior paralelo a Oy de tamanho 6 e eixo menor de tamanho 4. Fazendo o mesmo raciocínio da questão 7, os pontos que satisfazem a inequação são os pontos interiores da elipse. A segunda inequação equivale a $y + 2 < 2(x+1)^2$. Trocando a desigualdade por uma igualdade temos uma parábola com concavidade voltada para cima e vértice $(-1,-2)$. Partindo de um ponto (x,y) da parábola, é claro que a desigualdade é satisfeita se o valor de y diminui. Assim, dado um ponto (x,y) da parábola, qualquer ponto (x,t), com $t < y$ satisfaz a inequação. Como as duas inequações têm desigualdades estritas, nem os pontos da elipse, nem os pontos da parábola pertencem às soluções. As duas regiões, soluções das inequações, são mostradas na figura abaixo, no mesmo plano. A região em tom de azul mais escuro é a interseção das regiões, solução do sistema. Esta solução é mostrada isoladamente na segunda figura.





10. Como a reta focal é paralela ao eixo Ox, uma elipse nessa família tem equação

$$\frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{(y-3)^2}{b^2} = 1.$$

A excentricidade é $c/a = 1/2$ e vale a relação $a^2 = c^2 + b^2$. Combinando as equações temos a família de elipses

$$\mathcal{F}_a : \frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{(y-3)^2}{3a^2/4} = 1, \quad a > 0$$

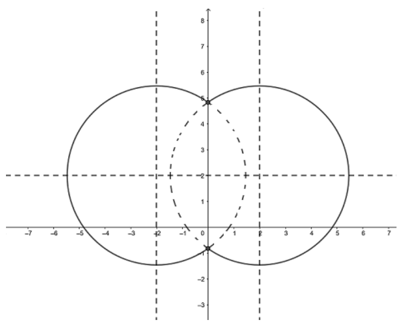
11. O centro C da hipérbole é o ponto médio do segmento que liga os dois vértices, logo $C = (0,0)$. A reta focal é o eixo Oy. A distância entre o centro e qualquer um dos focos é $c = d(C,(0,5)) = 5$. A distância entre o centro e qualquer um dos vértices é $a = 3$. Da relação $c^2 = a^2 + b^2$, temos $b = 4$. Assim, a equação da hipérbole é

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1.$$

Suas assíntotas são $y = \pm\frac{3}{4}x$.

12. Como a diretriz está sobre o eixo Oy e o foco está à esquerda da diretriz, a parábola tem concavidade voltada para esquerda. A distância entre o foco e a diretriz é dada por $2p = 3$, logo $p = 3/2$. O vértice está entre o foco e a diretriz e tem distância p do foco, logo $V = (-3/2, -3)$. Assim, a equação da parábola é $x + 3/2 = -\frac{1}{6}(y+3)^2$.

13. Para $x \geq 0$, $|x| = x$. Completando quadrados a equação equivale a $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 12$. Para $x < 0$, $|x| = -x$. Completando quadrados a equação equivale a $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 12$. A primeira é uma circunferência com centro $(2,2)$ e a segunda uma circunferência com centro $(-2,2)$. As duas têm raio igual a $\sqrt{12}$. A solução é a união dos pontos da primeira circunferência que têm abscissa não negativa com os pontos da segunda circunferência que têm abscissa negativa. Ela é representada na figura abaixo com linha contínua. Os pontos que não fazem parte da solução estão tracejados.



14. Já sabemos (por exemplo, vimos no módulo de inequações) que o produto de dois fatores é positivo se os dois fatores são positivos ou se os dois fatores são negativos. Então, resolveremos os dois sistemas

$$\begin{cases} 9x^2 + y^2 - 54x + 72 > 0 \\ x - y^2 - 2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2 + y^2 - 54x + 72 < 0 \\ x - y^2 - 2 < 0 \end{cases}$$

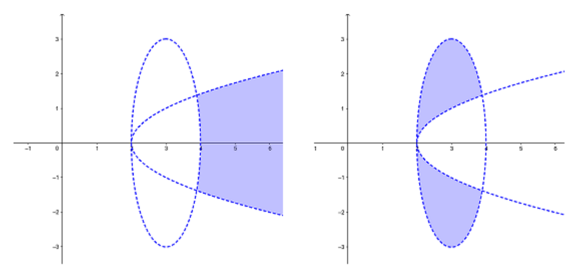
e encontraremos as regiões correspondentes às soluções de ambos. A solução da inequação no enunciado será a união dessas duas regiões.

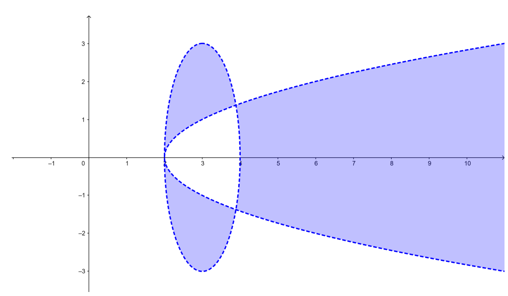
As curvas que delimitam os conjuntos de pontos que solucionam cada inequação são cônicas conhecidas. De fato, completando quadrados vemos que $9x^2 + y^2 - 54x + 72 = 0$ equivale a $(x-3)^2 + \frac{y^2}{9} = 1$, uma elipse centrada em $(3,0)$, com eixo maior paralelo ao eixo Oy de tamanho 6 e eixo menor de tamanho 2. Já a equação $x - y^2 - 2 = 0$ equivale a $x - 2 = y^2$, uma parábola com vértice em $(2,0)$, com concavidade voltada para direita e parâmetro $p = 1/4$.

Dado um ponto (x,y) da elipse, onde a igualdade em $(x-3)^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ é válida, se tomamos uma reta que une esse ponto ao centro, vemos que, a partir desse ponto, se nos afastamos mais do centro, ao menos um dos dois fatores $(x-3)$ ou y aumenta em valor absoluto. Por outro lado, se nos aproximamos do centro, ao menos um dos fatores diminui. Isto significa que $(x-3)^2 + \frac{y^2}{9} > 1$ é satisfeita nos pontos exteriores à elipse e $(x-3)^2 + \frac{y^2}{9} < 1$ é satisfeita nos pontos interiores à elipse.

No caso da parábola, podemos reescrever sua equação como $x = y^2 + 2$. Assim, dado um ponto (x,y) sobre a parábola, qualquer ponto (t,y) com $t < x$, à esquerda da parábola, satisfaz a inequação $x < y^2 + 2$ e qualquer ponto (t,y) com $t > x$ satisfaz a inequação $x > y^2 + 2$.

Assim, a região solução do primeiro sistema é a interseção entre o exterior da elipse e a região à direita da parábola. Seu esboço está na figura abaixo à esquerda. A região solução do segundo sistema é a interseção entre o interior da elipse e a região à esquerda da parábola. Seu esboço está na figura abaixo à direita. Note que os pontos da elipse e da parábola não pertencem a nenhum dos sistemas e ambas as cônicas aparecem tracejadas nas figuras. A união entre as duas regiões, solução da inequação-produto inicial está representada na segunda figura abaixo.

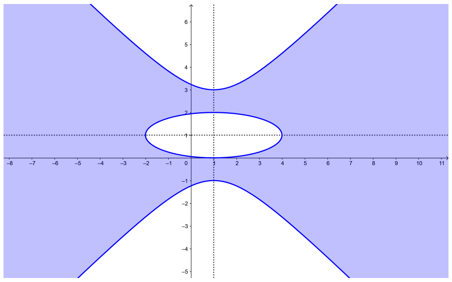


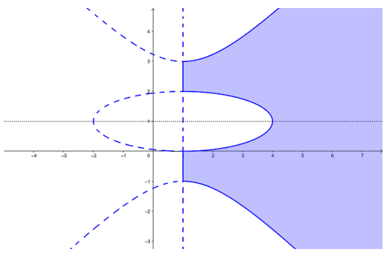


15. Temos três inequações para analisar. Vamos resolver primeiro o sistema composto pelas duas primeiras, e depois intersectar a solução desse com a solução da terceira inequação.

Como nas questões anteriores, as áreas delimitadas pelas duas primeiras inequações são cônicas. Completando quadrados vemos que $x^2 + 9y^2 - 2x - 18y + 1 \geq 0$ equivale a $\frac{(x-1)^2}{9} + (y-1)^2 \geq 1$. Quando a igualdade é satisfeita temos uma elipse centrada em $(1,1)$, com eixo maior paralelo ao eixo Ox de tamanho 6 e eixo menor de tamanho 2. A inequação $x^2 - y^2 - 2x + 2y + 4 = 0$ equivale a $\frac{(y-1)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{4} \leq 1$. Quando a igualdade é satisfeita temos uma hipérbole com mesmo centro que a elipse, reta focal paralela ao eixo Oy e vértices $(1,3)$ e $(1,-1)$.

Também como já explicado nas questões anteriores, $\frac{(x-1)^2}{9} + (y-1)^2 \geq 1$ nos pontos exteriores à elipse e nos pontos da própria elipse, enquanto $\frac{(y-1)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{4} \leq 1$ nos pontos entre as duas bandas da hipérbole e nos pontos da própria hipérbole. Na primeira das figuras abaixo vemos a região dada pela interseção entre essas duas inequações. Na segunda figura temos essa solução intersectada com os pontos que satisfazem a terceira inequação $|x| \leq 1$.





Material elaborado por Lorena Bulhosa