Módulo de Elementos básicos de geometria plana

Condição de alinhamentos de três pontos e a desigualdade triangular

Oitavo Ano

Condição de alinhamentos de três pontos e a desigualdade triangular

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. *Em cada um dos itens abaixo, determine o número de pontos de interseção dos círculos de raios r_A e r_B centrados nos pontos A e B, respectivamente.*

a) $AB = 5cm$, $r_A = 3cm$ *e* $r_B = 2cm$.

b) $AB = 5cm$, $r_A = 2cm$ *e* $r_B = 2cm$.

c) $AB = 5cm$, $r_A = 3cm$ *e* $r_B = 4cm$.

Exercício 2. *A desigualdade triângular afirma que qualquer lado de um triângulo é sempre menor que a soma dos outros dois. É possível demonstrar a partir desta propriedade que se o maior dentre três segmentos é menor que a soma dos outros dois então existe um triângulo formado por tais segmentos. Nos itens abaixo, decida se existe um triângulo com as medidas dadas. Justifique sua resposta.*

a) $4cm$, $5cm$ *e* $6cm$.

b) $7cm$, $3cm$ *e* $3cm$.

c) $4cm$, $4cm$ *e* $8cm$.

d) $3cm$, $3cm$ *e* $4cm$.

e) $6cm$, $6cm$ *e* $6cm$.

Comentário: Decorre da desigualdade triangular que um lado de um triângulo sempre deve ser maior que o valor absoluto da diferença dos outros dois lados. Para ver isso, considere as seguintes desigualdades envolvendo os lados de comprimentos a, b e c de um triângulo qualquer:

$$\begin{aligned} a + b > \quad c \Rightarrow \quad a > c - b \\ a + c > \quad b \Rightarrow \quad a > b - c. \end{aligned}$$

Como a deve ser maior que qualquer uma das diferenças possíveis dos outros dois lados, temos $a > |b - c|$.

Exercício 3. *Dois lados de um triângulo medem* $3cm$ *e* $4cm$. *Quais as possíveis medidas do terceiro lado?*

Exercício 4. *O maior lado de um triângulo mede* $5cm$ *e o menor* $2cm$. *Quais as possíveis medidas do terceiro lado?*

Exercício 5. *Um triângulo isósceles possui base de comprimento* $4cm$. *Quais as possíveis medidas dos lados iguais?*

Exercício 6. *Usando uma régua milimetrada e compasso, construa um triângulo de lados* 4, 6 *e* 7 .

2 Exercícios de Fixação

Exercício 7. *Nos itens abaixo, decida se existe um triângulo com as medidas dadas. Justifique sua resposta.*

a) $10cm$, $15cm$ *e* $25cm$.

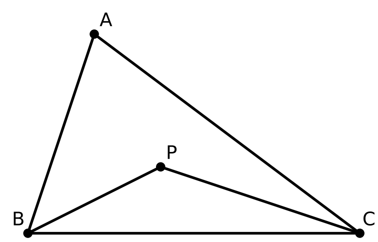
b) $31cm$, $33cm$ *e* $30cm$.

c) $40cm$, $40cm$ *e* $45cm$.

Exercício 8. *Um triângulo possui dois lados de medidas* $10cm$ *e* $17cm$. *Determine os possíveis valores do terceiro lado sabendo que ele é o quadrado de um inteiro.*

Exercício 9. *Dois lados de um triângulo medem* $7cm$ *e* $13cm$. *Determine os possíveis valores do outro lado sabendo que ele é divisível por* 5.

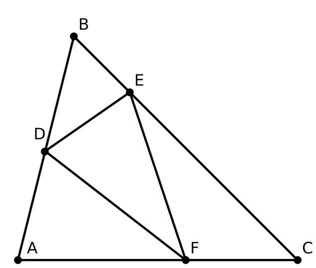
Exercício 10. *Seja* P *um ponto interno ao triângulo* $\triangle ABC$, *verifique que* $AB + AC > BP + PC$.



Exercício 11. *O lado* AC *do triângulo* ABC *tem comprimento* $3,8cm$ *e o lado* AB *tem comprimento* $0,6cm$. *Se o comprimento do lado* BC *é um inteiro, qual é o seu comprimento?*

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 12. *Mostre que o perímetro do triângulo* $\triangle DEF$ *da figura abaixo é menor que o perímetro do triângulo* $\triangle ABC$.

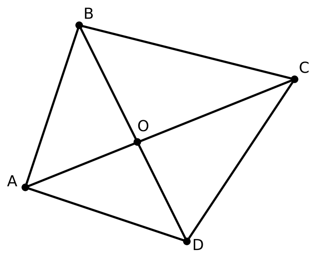


Exercício 13. *Prove que se é possível construirmos um triângulo com lados* a, b *e* c, *também é possível construirmos um triângulo com lados de comprimentos* $\dfrac{1}{a+b}$, $\dfrac{1}{a+c}$ *e* $\dfrac{1}{b+c}$.

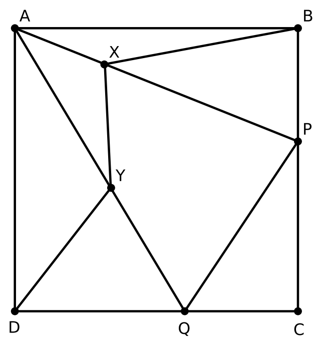
Exercício 14. *Na figura abaixo, verifique que:*

a) $\dfrac{AB+BC+CD+DA}{2} < BD+AC.$

b) $BD+AC < AB+BC+CD+DA.$



Exercício 15. *(Desafio) No quadrado $ABCD$, sejam P e Q pontos pertencentes aos lados BC e CD respectivamente, distintos dos extremos, tais que $BP = CQ$. Consideram-se pontos X e Y, $X \neq Y$, pertencentes aos segmentos AP e AQ respectivamente. Demonstre que, quaisquer que sejam X e Y, existe um triângulo cujos lados têm os comprimentos dos segmentos BX, XY e DY.*



Exercício 16. *Prove que a distância entre quaisquer dois pontos dentro de um triângulo não é maior que que metade do perímetro do triangulo.*

Respostas e Soluções

1 Exercícios Introdutórios

1. *Temos* 1*,* 0 *e* 2 *para os itens a), b) e c), respectivamente.*

2. *a) Sim, pois* $6 < 4 + 5$*.*

b) Não, pois $7 > 3 + 3$*.*

c) Não, pois $8 = 4 + 4$*.*

d) Sim, pois $4 < 3 + 3$*.*

e) Sim, pois $6 < 6 + 6$*.*

Comentário: Decorre da desigualdade triangular que um lado de um triângulo sempre deve ser maior que o valor absoluto da diferença dos outros dois lados. Para ver isso, considere as seguintes desigualdades envolvendo os lados de comprimentos a, b e c de um triângulo qualquer:

$$\begin{aligned} a + b > \quad c \Rightarrow & \quad a > c - b \\ a + c > \quad b \Rightarrow & \quad a > b - c. \end{aligned}$$

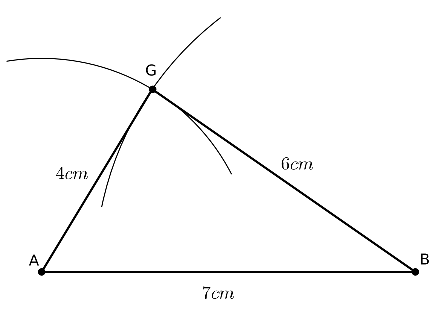
Como a deve ser maior que qualquer uma das diferenças possíveis dos outros dois lados, temos $a > |b - c|$.

3. *O comprimento do terceiro lado deve estar entre* $4-3 = 1$ *e* $3+4 = 7$*.*

4. *O terceiro lado deve ser maior que* $5 - 2 = 3$ *e menor ou igual a* 5*.*

5. *Se* x *é a medida dos lados iguais, devemos ter* $x+x > 4$*, ou seja,* $x > 2$*.*

6. *Construa um segmento* AB *de comprimento* $7cm$ *e outros dois de comprimentos* $4cm$ *e* $6cm$*. Em seguida, usando o compasso com centro em* A *e abertura igual ao segmento de comprimento* $4cm$*, desenhe um círculo. Faça o mesmo com o compasso centrado em* B *e usando como abertura o segmento de comprimento* $6cm$*. Seja* G *um dos pontos de interseção desses dois círculos. O triângulo* $\triangle ABG$ *possui lados de comprimentos* $4cm$*,* $6cm$ *e* $7cm$*.*



2 Exercícios de Fixação

7. *a) Não, pois o maior deles não é menor que a soma dos outros dois.*

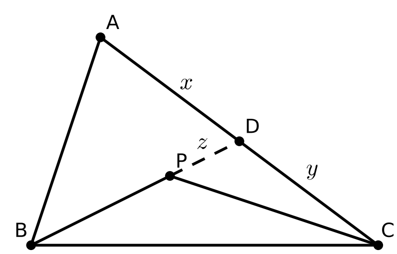
b) Sim, pois o maior deles é menor que a soma dos outros dois.

c) Sim, pois o maior deles é menor que a soma dos outros dois.

8. *A princípio, o terceiro lado poderia assumir qualquer valor maior que* $17 - 10 = 7cm$ *e menor que* $10 + 17 = 27cm$*. Nesse intervalo, apenas* 9*,* 16 *e* 25 *são quadrados de inteiros. Logo, o terceiro lado só pode assumir um desses três valores.*

9. *A princípio, o terceiro lado poderia assumir qualquer valor menor que* $13+7 = 20cm$ *e maior que* $13-7 = 6cm$*. Como entre tais números, apenas* 10 *e* 15 *são múltiplos de* 5*, esses dois números constituem os possíveis valores do terceiro lado.*

10. *Prolongue o segmento* BP *até ele intersectar o lado* AC *em* D*.*



Aplicando a desigualdade triangular nos triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle PDC$, obtemos:

$$\begin{aligned} AB + x = & \quad AB + AD \quad > BD = BP + z \\ z + y = & \quad PD + DC \quad > PC \end{aligned}$$

Somando as duas desigualdades resultantes, temos:

$$\begin{aligned} AB + (x + y) + \cancel{z} \quad > & \quad \cancel{z} + BP + PC \\ AB + AC \quad > & \quad BP + PC. \end{aligned}$$

11. *O comprimento do lado* BC *deve ser menor que* $3,8 + 0,6 = 4,4cm$ *e maior que* $3,8 - 0,6 = 3,2cm$*. O lado* BC *corresponde ao único inteiro entre tais números, ou seja,* $BC = 4cm$*.*

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

12. *Pela desigualdade triangular aplicada aos triângulos $\triangle BDE$, $\triangle DAF$ e $\triangle EFC$, temos:*

$$\begin{aligned} DE &< BD + BE \\ EF &< EC + CF \\ DF &< DA + AF. \end{aligned}$$

Somando as três desigualdades, obtemos:

$$\begin{aligned} DE + EF + DF &< (BD + DA) + (AF + FC) \\ &\quad +(BE + EC) \\ &= AB + AC + BC. \end{aligned}$$

13. *(Extraído da Olimpíada Russa) Como todos as frações são positivas, basta mostrarmos que a maior delas é menor que a soma das outras duas. Suponha sem perda de generalidade que $\dfrac{1}{a+b}$ é a maior das três frações. Pela desigualdade triangular aplicada ao triângulo de lados a, b e c, temos: $c < a + b$. Consequentemente:*

$$\begin{aligned} a + c < &\quad 2a + b &< 2(a + b); \\ b + c < &\quad a + 2b &< 2(a + b). \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} > \frac{1}{2(a+b)} + \frac{1}{2(a+b)} = \frac{1}{a+b}.$$

14. *Aplicando a desigualdade triangular nos triangulos $\triangle ABO$, $\triangle BOC$, $\triangle COD$ e $\triangle AOD$, temos:*

$$\begin{aligned} AB &< AO + OB; \\ BC &< BO + OC; \\ CD &< OC + OD; \\ AD &< AO + OD. \end{aligned}$$

Somando as quatro desigualdades, temos

$$\begin{aligned} AB + BC + CD + DA &< 2(AO + BO + CO + DO) \\ &= 2(BD + AC). \end{aligned}$$

Para verificar o segundo item, basta aplicar a desigualdade triangular nos triângulos $\triangle BCD$, $\triangle ACD$, $\triangle ABD$ e $\triangle ABC$ para obtermos:

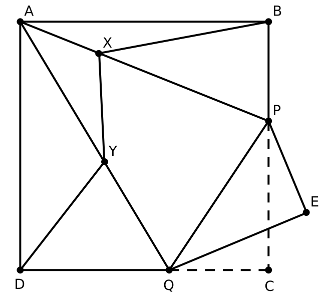
$$\begin{aligned} BD &< BC + CD; \\ AC &< AD + DC; \\ BD &< AD + AB; \\ AC &< AB + BC. \end{aligned}$$

Somando as quatro desigualdades, podemos concluir que:

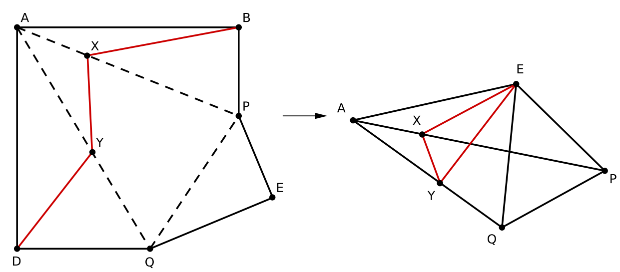
$$2(AC + BD) < 2(AB + BC + CD + DA).$$

Basta agora dividirmos as duas desigualdades resultantes para obtermos o enunciado.

15. *(Extraído da Olimpíada Iberoamericana) Recorte o triângulo $\triangle PQC$ e coloque-o virado formando o triângulo $\triangle PEQ$ de modo que $PE = QC$ e $QE = PC$. Formalmente estamos construindo um triângulo congruente ao incial.*



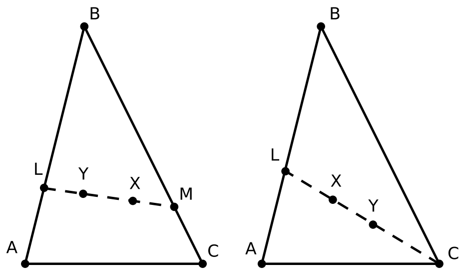
Imagine agora que os segmentos AP, PQ e AQ são marcas de dobraduras no papel. Como $BP = PE$, $QE = DQ$ e $AD = AB$, podemos agora dobrar os triângulos ao longo desses segmentos e formar um tetraedro como indica a figura abaixo.



Como X, Y e E são três vértices em arestas distintas do tetraedro, eles formam um triângulo.
Comentário para Professores: O apelo físico do uso dobraduras tem como propósito tornar a solução mais acessível, natural e divertida para alunos jovens. Tal operação pode ser formalizada com o uso de isometrias no espaço.

16. *Sejam X e Y pontos no interior do triângulo $\triangle ABC$. Trace a reta que os une. Se os dois pontos não estão em mesmo lado do triângulo, tal reta intersecta os lados em dois pontos. A figura abaixo representa os dois caso possíveis.*
No primeiro desenho, $XY \leq LM$. Além disso, pela desigualdade triangular:

$$\begin{aligned} LM &< BL + BM; \\ LM &< AL + AM \\ &< AL + AC + CM. \end{aligned}$$



Então,

$$\begin{aligned} 2LM &< (BL + AL) + (BM + CM) + AC \\ &= 2p \end{aligned}$$

No segundo desenho, novamente pela desigualdade triangular, temos:

$$\begin{aligned} LM &< BL + BC \\ LM &< LA + AC. \end{aligned}$$

Somando as desigualdades,

$$\begin{aligned} 2LM &< (BL + LA) + AC + BC \\ &= 2p \end{aligned}$$

Em ambos os casos, $LM < p$, como desejado. Caso os dois pontos estejam em um mesmo lado do triângulo, o comprimento do segmento que os une é menor ou igual que o lado que os contém. Este por sua vez é menor que o semiperímetro em virtuda da deisugaldade triangular.

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com