Módulo de Plano Cartesiano e Sistemas de Equações

Equações de Primeiro Grau com Duas Incógnitas

7° **ano E.F.**

Professores: Tiago Miranda e Cleber Assis

Portal da Matemática
OBMEP

Plano Cartesiano e Sistemas de Equações
Equações de Primeiro Grau com Duas Incógnitas

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Vitor tem 2 filhos. Para que as pessoas descubram as respectivas idades, ele faz duas afirmações:

I) A soma das idades das crianças é 7.

II) A diferença entre o dobro da idade do mais novo com a idade do mais velho é 2.

Quais as idades dos filhos de Vitor?

Exercício 2. Resolva algebricamente o sistema

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x + y = 1. \end{cases}$$

Exercício 3. A partir das equações

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x + y = 1, \end{cases}$$

construa o gráfico cartesiano dessas equações e depois determine, se houver, o(s) seu(s) ponto(s) de interseção.

Exercício 4. Resolva algebricamente o sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x - 5y = 7. \end{cases}$$

Exercício 5. Resolva o sistema anterior geometricamente.

Exercício 6. Resolva algebricamente o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{x}{3} = 7 \\ \dfrac{x+2y}{3} - \dfrac{y}{6} = 4 \end{cases}$$

Exercício 7. Pedro e Mariano têm juntos 195 bolinhas de gude. Se Pedro tem 45 bolinhas de gude a mais que Mariano, quantas cada um tem?

Exercício 8. João retirou de um caixa eletrônico $R\$330,00$ entre cédulas de $R\$50,00$ e $R\$10,00$, num total de 17 cédulas. Qual a quantidade de cada um dos tipos de cédulas?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 9. José e Maria, acompanhados de seu filho Pedro, queriam se pesar. Para tanto, utilizaram uma balança defeituosa que só indicava corretamente pesos superiores a 60 kg. Dessa forma, eles se pesaram, dois a dois, e obtiveram os seguintes resultados:

- José e Pedro: 87 kg;
- José e Maria: 123 kg; e
- Maria e Pedro: 66 kg.

Diante desses resultados , qual o peso de cada um?

Exercício 10. Em um determinado colégio, os meninos e meninas usam uniformes diferentes: os meninos usam sapatos e camisa azul e as meninas usam sandálias e blusa vermelha. Em uma determinada sala de aula, a professora percebeu que o número de blusas vermelhas era o dobro do número de camisas azuis e todos os calçados juntos totalizavam 54. Determine quantos eram os meninos e as meninas desta sala.

Exercício 11. Jonas jogou 20 moedas sobre a mesa, das quais algumas caíram com cara virada para cima e outras, coroa, é claro. Se o número de caras é 25% do número de coroas, quantas são as coroas?

Exercício 12. Em uma cozinha, existem garfos para peixe, com três dentes, e para carne bovina, com quatro dentes, num total de 32 garfos e 108 dentes. Determine a quantidade de garfos de carne bovina desta cozinha.

Exercício 13. Joãozinho desenhou em seu caderno 20 figuras geométricas. Como só existiam triângulos e pentágonos e ele desenhou 78 vértices, determine a quantidade de pentágonos desenhados.

Exercício 14. Classifique o sistema abaixo em possível determinado, possível indeterminado ou impossível.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ \\ x + 4y = 14 \end{cases}$$

Exercício 15. Usando uma balança de dois pratos, verificamos que 4 abacates pesam o mesmo que 9 bananas e que 3 bananas pesam o mesmo que 2 laranjas. Se colocarmos 9 laranjas num prato da balança, quantos abacates deveremos colocar no outro prato, para equilibrar a balança?

a) 1 b) 2 c) 4 d) 5 e) 6.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 16. Quando João vai para a escola a pé e volta de ônibus, ele gasta uma hora e quinze minutos; quando vai e volta de ônibus, ele gasta meia hora. Para cada meio de transporte, o tempo gasto na ida é igual ao tempo gasto na volta. Quanto tempo ele gasta quando vai e volta a pé?

Exercício 17. Oito vasos iguais, encaixados, formam uma pilha de $36cm$ de altura. Dezesseis vasos iguais aos primeiros, também encaixados, formam outra pilha de $60cm$ de altura. Qual é a altura de cada vaso?

Exercício 18. Rosa resolveu distribuir $R\$250,00$ para seus sobrinhos, dando a mesma quantia inteira (sem centavos) para cada um e percebeu que sobrariam $R\$10,00$. Então, ela pensou em diminuir em $R\$1,00$ a quantia de cada um e descobriu que sobrariam $R\$22,00$. Por fim, ela resolveu distribuir apenas $R\$240,00$. Quanto ganhou cada sobrinho?

Exercício 19. As massas de todos os pares possíveis formados com 5 estudantes são 90kg, 92kg, 93kg, 94kg, 95kg, 96kg, 97kg, 98kg, 100kg e 101kg. Qual é a massa do estudante de massa intermediária?

Exercício 20. Resolva o sistema de equações

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 24 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 48 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 96. \end{cases}$$

Exercício 21. Resolva o sistema de equações abaixo.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_4 + x_5 + x_6 = -3 \\ x_5 + x_6 + x_7 = -9 \\ x_6 + x_7 + x_8 = -6 \\ x_7 + x_8 + x_1 = -2 \\ x_8 + x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

Respostas e Soluções.

1. (Adaptado da Videoaula)
Chamemos as idades de V e N, para os filhos mais velho e mais novo, respectivamente. Do enunciado, podemos concluir que

$$\begin{cases} N+V=7 \\ 2N-V=2. \end{cases}$$

Daí, podemos atribuir alguns valores inteiros para N e observar o "comportamento" de V, conforme a tabela abaixo.

N	V	$N+V$	$2N-V$
0	7	7	-7
1	6	7	-4
2	5	7	-1
3	4	7	2
4	3	7	5
5	2	7	8
6	1	7	11
7	0	7	14

Observe que apenas para $N=3$ e $V=4$ o problema fica satisfeito.

2. (Adaptado da Videoaula)
Solução 1:
A partir de

$$\begin{cases} 2x-y=4 \\ 3x+y=1. \end{cases}$$

Podemos fazer

$$y=1-3x,$$

e substituir em $2x-y=4$. Assim

$$\begin{aligned} 2x-y &= 4 \\ 2x-(1-3x) &= 4 \\ 2x-1+3x &= 4 \\ 5x &= 4+1 \\ x &= \frac{5}{5} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Por fim, teremos

$$y=1-3\cdot 1=-2.$$

O conjunto solução é

$$S=\{(1,-2)\}.$$

Solução 2:
A partir de

$$\begin{cases} 2x-y &= 4 \\ 3x+y &= 1. \end{cases}$$

podemos somar as duas equações e obter

$$5x=5,$$

ou seja, $x=1$. Substituindo em qualquer uma das fórmulas anteriores, teremos $y=-2$, e assim é o conjunto solução $S=\{(1,-2)\}$.

Observação: Também poderíamos usar o método de comparação.

3. (Adaptado da Videoaula)
Podemos escrever as equações dadas como exposto abaixo e construir as tabelas de correspondências entre x e y:

$y=2x-4$

x	$2x-4$
0	-4
1	-2
2	0
$\vdots$	$\vdots$

$y=1-3x$

x	$1-3x$
0	1
1	-2
2	-5
$\vdots$	$\vdots$

Agora, plotando dois desses valores no gráfico e traçando duas retas por eles chegamos ao resultado abaixo, cujo cruzamento é ponto que resolve o sistema.

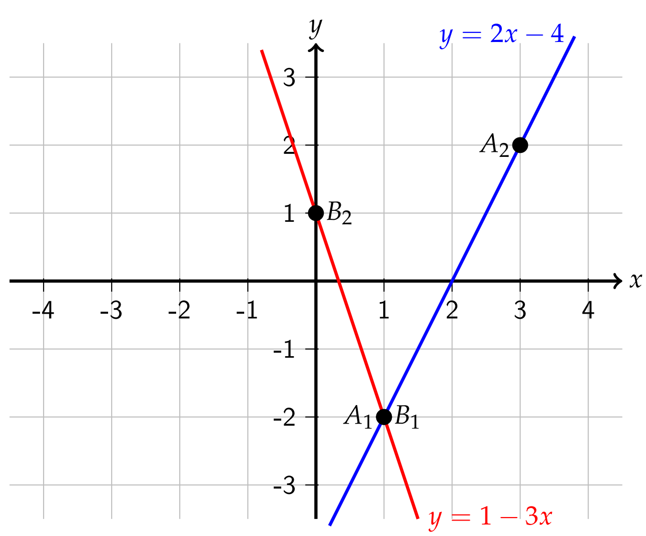

Figura 1

Por fim, o ponto de interseção é o $A_1 = B_1$ e assim $S = \{(1, -2)\}$.

4. (Adaptado da Videoaula)
Podemos multiplicar a primeira fórmula por 5 e a segunda por (-2), ficando com

$$\begin{cases} 15x - 10y = 25 \\ -4x + 10y = -14, \end{cases}$$

somando-as chegaremos $11x = 11$, com $x = 1$. Substituindo em alguma das iniciais, teremos $y = -1$. Por fim, chegamos a $S = \{(1, -1)\}$.

5. (Adaptado da Videoaula)
Vamos construir duas tabelas com alguns valores inteiros para x, e substitui-los na fórmula correspondente para encontrar valores inteiros de y que facilitem a construção do gráfico.

$y = \dfrac{3x-5}{2}$

x	$\dfrac{3x-5}{2}$
0	$\frac{5}{2}$
1	-1
2	$\frac{1}{2}$
3	2
4	$\frac{3}{2}$
5	4
6	$\frac{5}{2}$
$\vdots$	$\vdots$

$y = \dfrac{2x-7}{5}$

x	$\dfrac{2x-7}{5}$
0	$-\frac{7}{5}$
1	-1
2	$-\frac{3}{5}$
3	$-\frac{1}{5}$
4	$\frac{1}{5}$
5	$\frac{3}{5}$
6	1
$\vdots$	$\vdots$

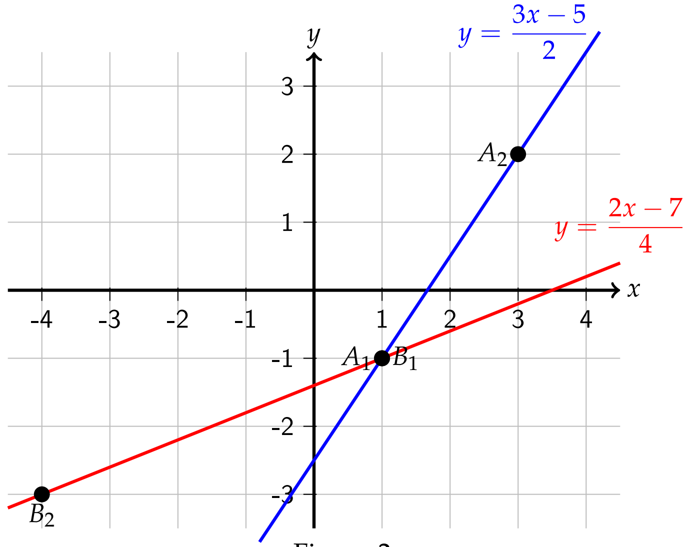

Figura 2

Por fim, $S = \{(1, -1)\}$.

6. (Adaptado da Videoaula)
Primeiramente eliminemos os denominadores das duas frações. A primeira equação fica

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{2} + \frac{x}{3} &= 7 \\ \frac{3x+3y+2x}{6} &= \frac{42}{6} \\ 5x + 3y &= 42. \end{aligned}$$

A segunda equação fica

$$\begin{aligned} \frac{x+2y}{3} - \frac{y}{6} &= 4 \\ \frac{2x+4y-y}{6} &= \frac{24}{6} \\ 2x + 3y &= 24. \end{aligned}$$

E um sistema equivalente ao inicial é

$$\begin{cases} 5x + 3y = 42 \\ 2x + 3y = 24. \end{cases}$$

Podemos subtraí-las, obtendo

$$\begin{aligned} 3x &= 18 \\ x &= \frac{18}{3} \\ x &= 6. \end{aligned}$$

Substituindo em alguma das equações obteremos $y = 4$. Portanto, o conjunto solução é $S\{(6, 4)\}$.

7. Chamando a quantidade de bolinhas de Pedro de p e a quantidade de bolinhas de Mariano de m, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} p + m = 195 \\ p = m + 45. \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação na primeira, obtém-se $(m+45)+m=195$, ou seja, $m=75$. Assim, Mariano possui 75 bolinhas de gude e, como a soma das quantidades é 195, Pedro possui 120 bolinhas de gude.

8. Temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x+y=17 \\ 50x+10y=330 \end{cases}$$

onde x representa a quantidade de cédulas de $R\$50,00$ e y, a de $R\$10,00$. Substituindo $x=17-y$ na segunda equação, obtém-se $50(17-y)+10y=330$, ou seja, $y=13$. Como o total de cédulas é 17, tem-se $x=4$. Portanto, foram retiradas 13 cédulas de $R\$10,00$ e 4 cédulas de $R\$50,00$.

9. Sendo as iniciais de cada nome a representação dos respectivos pesos, podemos construir o sistema

$$\begin{cases} j+p=87 \\ j+m=123 \\ m+p=66. \end{cases}$$

Agora, somando todas as equações, teremos

$$2j+2p+2m=276,$$

e simplificando por dois chegaremos a

$$j+p+m=138.$$

Como $j+p=87$, então $m=51$. Seguindo o mesmo método, teremos $j=72$ e $p=15$.

10. Chamando a quantidade de meninas de y e a quantidade de meninos de x, temos o sistema:

$$\begin{cases} y=2x \\ 2x+2y=54 \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação na segunda, ficamos com:

$$\begin{aligned} 2x+2(2x) &= 54 \\ 6x &= 54 \\ x &= 9. \end{aligned}$$

Temos então 9 meninos e, como a quantidade de meninas é o dobro da quantidade de meninos, 18 meninas.

11. Chamando a quantidade de caras de k e a quantidade de coroas de c, temos:

$$\begin{cases} k=25\%c \\ k+c=20 \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação na segunda, ficamos com:

$$\begin{aligned} 0,25c+c &= 20 \\ 1,25c &= 20 \\ c &= \frac{20}{1,25} \\ c &= 16. \end{aligned}$$

Temos então que o número de coroas é 16.

12. Vamos chamar a quantidade de garfos de peixe de p e a quantidade de garfos de carne de c. Assim, chegamos ao seguinte sistema.

$$\begin{cases} c+p=32 \\ 4c+3p=108 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por (-3), temos:

$$\begin{cases} c+p=32 \\ -3c-3p=-96 \\ 4c+3p=108 \end{cases}$$

Agora basta somar as duas últimas equações, donde chegamos que $c=12$, ou seja, a quantidade de garfos de carne bovina é 12.

13. Supondo que existam t triângulos e p pentágonos. Organizando as informações, obtemos um sistema:

$$\begin{cases} t+p=20 \\ 3t+5p=78 \end{cases}$$

Vamos agora multiplicar a primeira equação por (-3). Chegamos a um novo sistema de equações:

$$\begin{cases} -3t-3p=-60 \\ 3t+5p=78 \end{cases}$$

Somando as equações, ficamos com $2p=18$, segue que $p=9$, ou seja, foram 9 pentágonos desenhados por Joãozinho.

14. Para discutir este sistema, vamos multiplicar a segunda equação por (-2). Chegamos ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x+3y=13 \\ -2x-8y=-2 \end{cases}$$

Somando as equações, temos $-5y=-15$. Daí segue que $y=3$ e $x=2$. Como encontramos uma única solução, $S=(2;3)$ e o sistema é possível determinado.

15. (Extraído da OBMEP 2005) Chamando o peso de cada abacate de a, o das bananas de b e o das laranjas de l, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} 4a = 9b \\ 3b = 2l \\ 9l = k, \end{cases}$$

onde k é o peso em de abacates que equilibra a terceira pesagem. Partindo da terceira equação, tem-se

$$2k = 18l = 27b = 12a,$$

ou seja, $2k = 12a$ e daí segue que $k = 6a$. Portanto, deverão ser 6 abacates. Resposta E.

16. (Extraído da OBMEP 2011) Suponhamos que o tempo de ida, ou volta, a pé seja x e o tempo de ida de ônibus seja y. Pelas informações, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} x + y & = & 1h15min \\ \\ 2y & = & 30min \end{cases}$$

Pela segunda equação, $y = 15$. Substituindo tal valor na primeira, obtém-se $x = 75 - 15 = 60min$. Para ir e voltar a pé, o tempo gasto é $2x = 120min = 2h$.

17. (Extraído da OBMEP 2011) Dividamos cada vaso em duas partes: a parte de baixo de altura x e a parte de cima de altura y, ou seja, a altura de cada vaso é $x + y$. No caso de n vasos empilhados, a altura da pilha é $x + ny$. Assim, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} x + 8y & = & 36 \\ \\ x + 16y & = & 60 \end{cases}$$

Subtraindo as duas equações, obtém-se $8y = 24$, segue daí que $y = 3$ e, consequentemente, $x = 12$. Portanto, cada vaso tem $3 + 12 = 15cm$ de altura.

18. (Extraído da OBM $-$ 2014)
Supondo x a quantidade de sobrinhos e y a quantidade, em reais, que cada sobrinho deveria receber na primeira situação. Analisando as duas situações iniciais, chega-se ao sistema

$$\begin{cases} \text{xy = 250} - \text{10 = 240} \\ \\ \text{x(y} - \text{1) = 250} - \text{22 = 228} \end{cases}$$

Perceba que não se trata de um sistema de equações do primeiro grau, mas sua solução é simples. Pela segunda equação, temos $xy - x = 228$. Pela primeira equação, $xy = 240$ e assim obtemos $240 - x = 228$. Daí segue que $x = 12$. Portanto, cada sobinho recebeu $240/12 = R\$20,00$.

19. (Extraído da OBM 2012)
A soma de todas as massas é $956/4 = 239$, já que cada estudante está presente em quatro pares. Sejam suas massas, da menor para a maior, a, b, c, d, e. Sabe-se que $a + b = 90$ e $d + e = 101$, ou seja, $a + b + d + e = 90 + 101 = 191$. Assim, a massa do estudante de massa intermediária é $239 - 191 = 48kg$.

20. Somando todas as equações, obtém-se:

$$6(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 186,$$

ou seja, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 31$. Nota-se que a primeira equação pode ser escrita como $x_1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_1 + 31 = 6$ e daí segue que $x_1 = -25$. De forma análoga, obtém-se os demais resultados repetindo o procendimento com as outras equações. Assim, $x_2 = -19$, $x_3 = -7$, $x_4 = 17$, $x_5 = 65$.

21. (Olimpíada Russa)
Somando todas as equações, temos $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = \dfrac{0}{3} = 0$. Somando agora a primeira, a quarta e a sétima equações, obtemos $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_1 = 0 + x_1 = 6 - 3 - 2 = 1$, ou seja $x_1 = 1$. De forma análoga podemos obter as demais incógnitas. $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = -4$, $x_6 = -3$, $x_7 = -2$, $x_8 = -1$.

PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
CONTATO@CURSOARQUIMEDES.COM