Módulo: Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal

Somas de elementos em Linhas, Colunas e Diagonais do Triângulo de Pascal

2° ano do E.M.

Portal da Matemática
OBMEP

Módulo: Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal
Somas de elementos em Linhas, Colunas e Diagonais do Triângulo de Pascal

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine os valores das somas:

a) $\sum_{i=0}^{2} \binom{4+i}{i}$ b) $\sum_{i=0}^{3} \binom{5+i}{i}$ c) $\sum_{i=0}^{2} \binom{6+i}{i}$
d) $\sum_{i=0}^{5} \binom{8+i}{i}$

Exercício 2. Calcule a maior potência de 2 que divide S, em cada um dos casos abaixo:

(a) $S = \sum_{i=0}^{2} \binom{2}{i}$;

(b) $S = \sum_{i=0}^{9} \binom{9}{i}$;

(c) $S = \sum_{i=0}^{16} \binom{16}{i}$;

(d) $S = \sum_{i=0}^{21} \binom{21}{i}$.

Exercício 3. Encontre o valor das somas abaixo:

(a) $S = \sum_{i=0}^{3} \binom{4+i}{4}$;

(b) $S = \sum_{i=0}^{4} \binom{5+i}{5}$;

(c) $S = \sum_{i=0}^{5} \binom{6+i}{6}$.

Exercício 4. O símbolo $C_{n,p}$ é definido por $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ para $n \geq p$, com $0! = 1$. Estes números $C_{n,p}$ são inteiros e aparecem como coeficientes no desenvolvimento de $(a+b)^n$.

a) Mostre que $C_{n,p-1} + C_{n,p} = C_{n+1,p}$.

b) Seja $S = C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \ldots + C_{n,n}$. Calcule $\log_2 S$.

Exercício 5. Se n é par, dentre os números binomiais abaixo

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n},$$

qual deles possui maior valor?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. Encontre o valor da soma

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2.$$

Exercício 7. Se A possui 64 subconjuntos, qual o número de elementos de A?

Exercício 8. Calcule $\sum_{k=0}^{n} (k+1)\binom{n}{k}$.

Dica: Use que $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Exercício 9. Calcule o valor da soma

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot 3^k \cdot \binom{n}{k}.$$

Exercício 10. Calcule o valor das somas:

(a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots$.

(b) $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots$.

Exercício 11. Calcule o valor das somas:

(a) $\binom{n}{1} + 3\binom{n}{3} + 5\binom{n}{5} + \ldots$.

(b) $2\binom{n}{2} + 4\binom{n}{4} + 6\binom{n}{6} + \ldots$.

Exercício 12. Calcule o valor da soma:

$$\binom{n}{0} - 2\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n(n+1)\binom{n}{n}.$$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 13. Verifique a identidade de Euler:

$$\sum_{i=0}^{p} \binom{m}{i}\binom{n}{p-i} = \binom{m+n}{p}.$$

Exercício 14. Mostre, usando um argumento combinatório, que:[1]

$$1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + \ldots + n \cdot \binom{n}{n} = n2^{n-1}$$

Exercício 15. Para os inteiros positivos k e n, com $k \leq n$, sabe-se que $\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$. Então, o valor de

$$\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$$

é igual a:

a) $2^n + 1$ b) $2^{n+1} + 1$ c) $\frac{2^{n+1}+1}{n}$
d) $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ e) $\frac{2^n-1}{n}$.

[1] Veja que tal identidade segue imediatamente do exercício 11.

Exercício 16. Considere o conjunto $S = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a+b = 18\}$. A soma de todos os números da forma $\dfrac{18!}{a!b!}$, $\forall (a,b) \in S$, é:

a) 8^6 b) $9!$ c) 9^6 d) 12^6 e) $12!$.

Exercício 17. Encontre uma fórmula fechada para a soma

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2.$$

Exercício 18. Mostre que:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}.$$

Exercício 19. Seja n um inteiro não negativo. Mostre que:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}$$

Exercício 20. Calcule o valor da soma

$$S = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3.$$

Exercício 21. Calcule o valor da soma:

$$S = 2\cdot 1^2 + 5\cdot 2^2 + 8\cdot 3^2 + \ldots + (3n-1)\cdot n^2.$$

Exercício 22. Calcule o valor da soma

$$S = 50\cdot 51 + 51\cdot 52 + \ldots + 100\cdot 101.$$

Exercício 23. Calcule o valor da soma

$$S = \sum_{k=1}^{n} k(2k+1).$$

Exercício 24. O número de Fibonacci F_n é definido como a soma dos elementos da n-ésima diagonal inversa do Triângulo de Pascal, como ilustrado no diagrama abaixo:

$$\begin{array}{r|lllllllll}
 & 1 \\
F_1 = 1 & 1 & 1 \\
F_2 = 1 & 1 & 2 & 1 \\
F_3 = 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\
F_4 = 3 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
F_5 = 5 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
F_6 = 8 & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & 1
\end{array}$$

Prove que $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

Exercício 25. Seja n um inteiro ímpar maior que 1. Prove que a sequência

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots \binom{n}{\frac{n-1}{2}}$$

contém um número ímpar de números ímpares.

Exercício 26. Calcule o valor da soma

$$S = \binom{n}{0}\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n-2}\binom{n}{n}.$$

Exercício 27. (Extraído da Putnam 1962) Mostre que:

$$\sum_{r=1}^{n} r^2\binom{n}{r} = n(n+1)2^{n-2}.$$

Exercício 28. Calcule o valor da soma

$$S = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}7^k.$$

Respostas e Soluções.

1. Pelo Teorema das Diagonais, temos:

a) $\binom{7}{2} = 21$ b) $\binom{9}{3} = 84$ c) $\binom{9}{2} = 36$
d) $\binom{14}{5} = 2002$

2.

(a) Pelo Teorema das Linhas, o valor da soma é dado por 2^2. Portanto o expoente da maior potência de 2 que divide S é 2.

(b) Pelo Teorema das Linhas, o valor da soma é dado por 2^9. Portanto o expoente da maior potência de 2 que divide S é 9.

(c) Pelo Teorema das Linhas, o valor da soma é dado por 2^{16}. Portanto o expoente da maior potência de 2 que divide S é 16.

(d) Pelo Teorema das Linhas, o valor da soma é dado por 2^{21}. Portanto o expoente da maior potência de 2 que divide S é 21.

3.

(a) Pelo Teorema das Colunas, o valor da soma é dado por $\binom{4+3+1}{4+1} = 56$.

(b) Pelo Teorema das Colunas, o valor da soma é dado por $\binom{5+4+1}{5+1} = 210$.

(c) Pelo Teorema das Colunas, o valor da soma é dado por $\binom{6+5+1}{6+1} = 792$.

4. (Extraído do Vestibular da UNICAMP)

a)

$$\begin{aligned}
C_{n,p-1} + C_{n,p} &= \frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)!} + \frac{n!}{p!(n-p)!}\\
&= \frac{(n+1)!}{p!(n-p+1)!}\left(\frac{p}{n+1} + \frac{n-p+1}{n+1}\right)\\
&= \frac{(n+1)!}{p!(n-p+1)!}\\
&= C_{n+1,p}.
\end{aligned}$$

b) Pelo teorema das linhas, $S = 2^n$. Portanto, $\log_2 S = n$.

5. Como $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, segue que

$$\begin{aligned}
\max &\left\{\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}\right\} =\\
\max &\left\{\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n/2}\right\}.
\end{aligned}$$

Basta mostrarmos agora que nessa última lista os números estão dispostos em ordem crescente. Comparemos o quociente de dois termos consecutivos:

$$\begin{aligned}
q &= \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}}\\
&= \frac{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}}{\dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}}\\
&= \frac{n-k+1}{k}.\\
&= \frac{n+1}{k} - 1.
\end{aligned}$$

Como $k \leq n/2$, segue que $\dfrac{n+1}{k} > 2$ e assim $q > 1$. Isso mostra que a lista de binomiais é crescente e o seu valor máximo é $\binom{n}{n/2}$.

6. Note que $2\binom{n}{2} = n^2 - n$ e assim, pelo Teorema das Colunas,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n}\left(2\binom{k}{2} + k\right)\\
&= 2\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{2}\right) + \sum_{k=1}^{n} k\\
&= 2\left(\binom{n+1}{3}\right) + \frac{n(n+1)}{2}\\
&= \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2}\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

7. Se um conjunto possui n elementos, para determinar a sua quantidade de subconjuntos, podemos contar para cada i, quantos subconjuntos possuem i elementos e posteriormente somar todos os valores encontrados. Como existem $\binom{n}{i}$ subconjuntos de i elementos, pelo Teorema das Linhas, o número de subconjuntos é

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Como $2^n = 64 = 2^6$, segue que A possui 6 elementos.

8. Usando a dica dada e o Teorema das Linhas, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k} &= \left(\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\right)+\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right)\\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} k\cdot\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}\right)+2^n\\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}\right)+2^n\\
&= n\cdot 2^{n-1}+2^n\\
&= 2^{n-1}(n+2).
\end{aligned}$$

9. Usaremos novamente a dica do problema anterior:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\cdot 3^k\cdot\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} k\cdot 3^k\cdot\binom{n}{k}\\
&= \sum_{k=1}^{n} k\cdot 3^k\cdot\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}\\
&= 3n\left(\sum_{k=1}^{n} 3^k\binom{n-1}{k-1}\right)\\
&= 3n(3+1)^{n-1}\\
&= 3n\cdot 4^{n-1}
\end{aligned}$$

10.

(a) Note que

$$\begin{aligned}
(1+1)^n+(1-1)^n &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}+\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^n\\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(1+(-1)^n)\\
&= 2\sum_{0\le 2j\le n}\binom{n}{2j}
\end{aligned}$$

Portanto

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots=\frac{2^n+0^n}{2}=2^{n-1}.$$

(b) Pelo Teorema das Linhas, a soma dos termos de índice par e de índice ímpar da n-ésima linha do Triângulo de Pascal é 2^n. Pelo item anterior, a soma dos termos de ordem par é $2^{n-1}=2^n/2$. Portanto, a soma dos termos de ordem ímpar é também 2^{n-1}.

11.

(a) Pelo exercício anterior, temos

$$\begin{aligned}
\binom{n}{1}+3\binom{n}{3}+5\binom{n}{5}+\ldots &=\\
\sum_{1\le 2j+1\le n}(2j+1)\binom{n}{2j+1}\\
\sum_{1\le 2j+1\le n}(2j+1)\cdot\frac{n}{2j+1}\binom{n-1}{2j} &=\\
n\cdot\sum_{1\le 2j+1\le n}\binom{n-1}{2j} &=\\
n\cdot 2^{n-2} & .
\end{aligned}$$

(b) Do mesmo modo, temos

$$\begin{aligned}
2\binom{n}{2}+4\binom{n}{4}+6\binom{n}{6}+\ldots. &=\\
\sum_{0\le 2j\le n}(2j)\binom{n}{2j} &=\\
\sum_{0\le 2j\le n}(2j)\cdot\frac{n}{2j}\binom{n-1}{2j-1} &=\\
n\cdot\sum_{0\le 2j\le n}\binom{n-1}{2j} &=\\
n\cdot 2^{n-2} & .
\end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{0}-2\binom{n}{1}+3\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n(n+1)\binom{n}{n} &=\\
\sum_{k}^{n}(-1)^k(k+1)\binom{n}{k} &=\\
\sum_{k}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}+\sum_{k}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} &=\\
\sum_{0\le 2j\le n}(2j)\binom{n}{2j}-\sum_{0\le 2j+1\le n}(2j+1)\binom{n}{2j+1}+(1-1)^n &=\\
\sum_{0\le 2j\le n}(2j)\binom{n}{2j}-\sum_{0\le 2j+1\le n}(2j+1)\binom{n}{2j+1}
\end{aligned}$$

Pelo exercício anterior, a diferença entre os dois últimos somatórios é zero.

13. Iresmo mostrar a identidade através de uma contagem dupla. Considere um grupo composto por $m+n$ pessoas, m das quais são mulheres e n são homens. O número de maneiras de escolhermos um grupo de p pessoas dentre as $m+n$ é claramente $\binom{m+n}{p}$. Outra maneira de contarmos isso, seria começar escolhendo i mulheres, de $\binom{m}{i}$ maneiras, e em seguida complementarmos o grupo com $p-i$ homens, que pode ser feito de $\binom{n}{p-i}$ maneiras. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o total de escolhas com exatamente i mulheres é $\binom{m}{i}\binom{n}{p-i}$. Como i pode variar no conjunto $\{0,1,\ldots,p\}$, o total de escolhas é $\sum_{i=0}^{p}\binom{m}{i}\binom{n}{p-i}$. Sabendo que as duas contagens que fizemos produzem resultados iguais, segue a identidade.

14. Queremos escolher algum subconjunto não vazio de um conjunto contendo n crianças para um passeio e, além disso, uma das escolhidas deverá receber um chocolate. Existem $\binom{n}{i}$ subcojuntos com i elementos e para cada uma dessas escolhas, temos i possibilidades para dar o chocolate. Pelo Princípio Multiplicativo, existem $i\cdot\binom{n}{i}$ tais conjuntos. Como i pode variar no conjunto $\{0,1,\ldots,n\}$, temos ao todo

$$1\cdot\binom{n}{1}+2\cdot\binom{n}{2}+\ldots+n\cdot\binom{n}{n}$$

possíveis escolhas.

Outra contagem possível seria primeiro escolhermos a criança que ganhará o chocolate e que certamente fará o passeio. Isso pode ser feito de n maneiras. Das $n-1$ crianças que sobraram, podemos escolher um subconjunto qualquer delas, vazio ou não, para acompanhar a criança escolhida no passeio. Existem 2^{n-1} tais que subconjuntos. Portanto existem $n\cdot 2^{n-1}$ escolhas possíveis.

Comparando os dois valores encontrados, obtemos a identidade do problema.

15. (Extraído do ITA 2014) Pelo Teorema das Linhas, temos

$$\begin{aligned}\binom{n}{0}+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n} &=\\ \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\binom{n}{i} &=\\ \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{i+1} &=\\ \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-\binom{n+1}{0}\right) &=\\ \frac{2^{n+1}-1}{n+1} & .\end{aligned}$$

Resposta letra D.

16. (ITA 2003) Como $\frac{18!}{a!b!}=\binom{18}{a}$ se $a+b=18$, segue que a soma procurada coincide com a soma dos elementos da décima-nona linha do Triângulo de Pascal, que vale $2^{18}=8^{6}$. Resposta letra A.

17. Pela identidade de Euler[2], com $m=p=n$, segue que:

$$\begin{aligned}\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2 &=\\ \binom{n}{0}\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}\binom{n}{n} &=\\ \binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\ldots+\binom{n}{n}\binom{n}{0} &=\\ \binom{n+n}{n} &=\\ \binom{2n}{n}.\end{aligned}$$

18.

$$\begin{aligned}(n+1)\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k} &=\\ \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(n+1)}{k+1}\binom{n}{k} &=\\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k+1} &=\\ 1-(1-1)^{n+1} &=\\ 1\end{aligned}$$

Portanto, dividindo a equação inicial por $n+1$,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}.$$

19. Usaremos novamente a relação de Euler contida no

[2]veja o exercício 13

exercício 13:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 &= \\
\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\binom{n}{k} &= \\
\sum_{k=0}^{n} k\cdot\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k} &= \\
\sum_{k=0}^{n} n\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k} &= \\
n\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k} &= \\
n\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{n-k}\binom{n}{k} &= \\
n\binom{2n-1}{n} &= \\
n\binom{2n-1}{n-1}.
\end{aligned}$$

20. Pelo Teorema das Colunas, temos

$$\begin{aligned}
6\binom{n+4}{4} &= 6\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{i+3}{3}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n}(i+3)(i+2)(i+1) \\
&= \sum_{i=0}^{n}(i^3+6i^2+11i+6) \\
&= (\sum_{i=1}^{n} i^3) + 6(\sum_{i=1}^{n} i^2) + 11(\sum_{i=1}^{n} i) + 6(n+1).
\end{aligned}$$

Pelo exercício 6, $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Portanto

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i^3 &= 6\binom{n+4}{4} - n(n+1)(2n+1) - \\
&- \frac{11n(n+1)}{2} - 6(n+1) \\
&= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.
\end{aligned}$$

Observação: Podemos repetir a estratégia anterior para calcular $S_k = \sum_{i=0}^{n} n^k$. Note que $k!\binom{n}{k}$ é um polinômio mônico de grau k na variável n. Consequentemente, podemos aplicar o Teorema das Colunas na soma $\sum k!\binom{n}{k}$ e escrever S_k em função das somas S_i, com $i < k$, e do binomial $\binom{n+k+1}{k+1}$.

21. Pelo exercício anterior, temos

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=1}^{n}(3n-1)\cdot n^2 \\
&= (\sum_{i=1}^{n} 3n^3) - (\sum_{i=1}^{n} n^2) \\
&= 3\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

22. Pelo Teorema das Colunas,

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=51}^{101} i(i-1) \\
&= 2\sum_{i=51}^{101}\frac{i(i-1)}{2} \\
&= 2\sum_{i=51}^{101}\binom{i}{2} \\
&= 2\sum_{i=2}^{101}\binom{i}{2} - \sum_{i=0}^{50}\binom{i}{2} \\
&= 2\binom{102}{3} - 2\binom{51}{3} \\
&= 301750.
\end{aligned}$$

23. Pelo exercício 6, temos

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n} k(2k+1) \\
&= (\sum_{k=1}^{n} 2k^2) + \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}.
\end{aligned}$$

24. Temos $F_{n+1} = \sum_{0\le k\le (n+1)/2}\binom{n-k+1}{k}$ e $F_n =$

$\sum_{0\le k\le n/2}^{n-1} \binom{n-k}{k}$. Portanto, pela Fórmula de Binet,

$$\begin{aligned}
F_{n+1}+F_n &= \\
\sum_{0\le k\le (n+1)/2}\binom{n-k+1}{k} + \sum_{0\le k\le n/2}\binom{n-k}{k} &= \\
\sum_{0\le k\le (n+1)/2}\binom{n-k+1}{k} + \sum_{1\le k\le n/2-1}\binom{n-(k-1)}{k-1} &= \\
\binom{n+1}{0} + \sum_{1\le k\le (n+1)/2}\left(\binom{n-k+1}{k}+\binom{n-k+1)}{k-1}\right) &= \\
\binom{n+1}{0} + \sum_{1\le k\le (n+1)/2}\binom{n-k+2}{k} &= \\
\binom{n+1}{0} + \sum_{1\le k\le (n+1)/2}\binom{n-k+2}{k} &= \\
\sum_{0\le k\le (n+2)/2}\binom{n-k+2}{k} &= \\
F_{n+2}.
\end{aligned}$$

25. Como $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{i} &= \frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}-2\right)\\
&= \frac{2^n-2}{2}\\
&= 2^{n-1}-1.
\end{aligned}$$

Como a soma anterior é um número ímpar, ela contém um número ímpar de termos ímpares.

26. Pela identidade do exercício 13, com $m = n$ e $p = n-2$, temos

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=0}^{n-2}\binom{n}{i}\binom{n}{i+2}\\
&= \sum_{i=0}^{n-2}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i-2}\\
&= \binom{2n}{n-2}.
\end{aligned}$$

27. Primeira Solução

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{n} r^2\binom{n}{r} &= \sum_{r=1}^{n} r^2\binom{n}{r}\\
&= \sum_{r=1}^{n} r^2\frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1}\\
&= n\sum_{r=1}^{n} r\binom{n-1}{r-1}\\
&= n(\sum_{r=2}^{n}(r-1)\binom{n-1}{r-1})+n(\sum_{r=1}^{n}\binom{n-1}{r-1})\\
&= n(\sum_{r=2}^{n}(r-1)\frac{n-1}{r-1}\binom{n-2}{r-2})+\\
&+ n(\sum_{r=1}^{n}\binom{n-1}{r-1})\\
&= n(n-1)\sum_{r=2}^{n}(r-1)\binom{n-2}{r-2})+n2^{n-1}\\
&= n(n-1)2^{n-2}+n2^{n-1}\\
&= n(n+1)2^{n-2}.
\end{aligned}$$

Segunda Solução

Seja S o número de maneiras de escolhermos um subconjunto não vazio de um grupo contendo n crianças e, sem seguida, darmos um caramelo para uma delas e, finalmente, darmos um chocolate também para uma das escolhidas. As crianças que irão receber o caramelo e o chocolate não precisam ser distintas. Para determinar S, veja que existem $\binom{n}{r}$ grupos de r crianças e uma vez escolhido esse grupo, existem $r\cdot r = r^2$ maneiras de distribuirmos o caramelo e o chocolate. Basta agora somarmos sobre todos os valores possíveis de r crianças obtendo $\sum_{r=1}^{n} r^2\binom{n}{r}$.

Outra contagem que produz o mesmo número é inicialmente escolher as crianças que receberão os doces e posteriomente suas companheiras. Precisamos considerar dois casos. Se a criança que recebe o caramelo é a mesma que recebe o chocolate, existem n tais escolhas. Em seguida, podemos escolher um subconjunto qualquer das crianças que sobraram para formarem um subconjunto com ela de 2^{n-1} maneiras. Quando as crianças são distintas, temos $n(n-1)$ maneiras de distribuirmos o caramelo e o chocolate. Em seguida, nos restam 2^{n-2} possíveis subconjuntos das crianças restantes. Assim,

$$S = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = n(n+1)2^{n-2}.$$

28.

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} 7^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} 7^k \\
&= n \sum_{k=1}^{n} k \binom{n-1}{k-1} 7^k \\
&= n(\sum_{k=1}^{n} (k-1) \binom{n-1}{k-1} 7^k) + n(\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} 7^k) \\
&= n(\sum_{k=2}^{n} (k-1) \frac{n-1}{k-1} \binom{n-2}{k-2} 7^k) + n(\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} 7^k) \\
&= n(n-2)(\sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} 7^k) + n(\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} 7^k) \\
&= n(n-2)(1+7)^{n-2} + n(1+7)^{n-1} \\
&= n(n+6)8^{n-2}.
\end{aligned}
$$

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com