Módulo Geometria Espacial 3 - Volumes e Áreas de Cilindro, Cone e Esfera

Cilindro.

3° ano/E.M.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

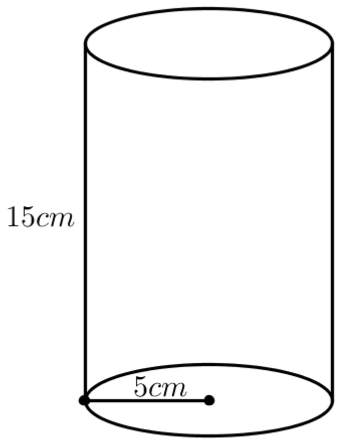
Geometria Espacial 3 - Volumes e Áreas de Cilindro, Cone e Esfera.
Cilindro.

1 Exercícios Introdutórios

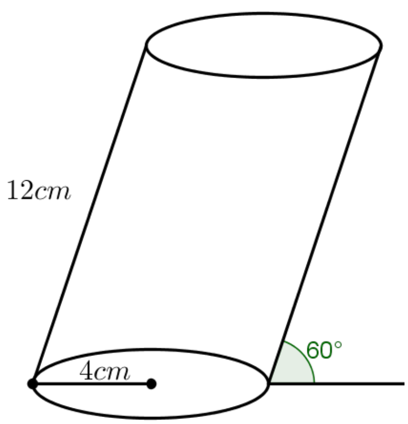
Exercício 1. Determine a área e o volume de um cilindro reto de raio da base medindo $10cm$ e altura medindo $12cm$.

Exercício 2. Qual a altura de um cilindro reto que tem raio da base medindo $8cm$ e volume de $640\pi cm^3$?

Exercício 3. Determine o volume do cilindro reto da figura.



Exercício 4. Qual o volume do cilindro oblíquo da figura?



2 Exercícios de Fixação

Exercício 5. Um cilindro equilátero tem 2 litros de volume. Determine sua altura.

Exercício 6. A área da secção meridiana de um cilindro reto é $64cm^2$. Determine seu volume.

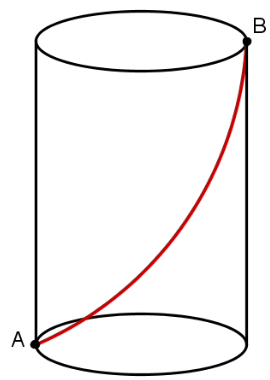
Exercício 7. A área lateral de um cilindro reto é o quádruplo da sua área da base. Qual a razão entre a medida do raio da base e da altura.

Exercício 8. Determine o volume de um cilindro inscrito em um cubo de aresta que mede $10cm$.

Exercício 9. Um líquido preenche completamente um cilindro. Ele deve ser transferido para um segundo cilindro com altura igual ao dobro da altura do primeiro. Qual deve ser o raio do segundo cilindro para que o líquido o preencha completamente sem derramar?

Exercício 10. Em um recipiente cilíndrico, de $10cm$ de raio da base e $30cm$ de altura, cuja água ocupa metade de sua capacidade, é mergulhado um cubo de $5cm$ de aresta, que afunda completamente. Qual a nova altura do nível da água no cilindro?

Exercício 11. No cilindro abaixo, A e B são pontos da secção meridiana. Um barbante é esticado pela superfície do cilindro, ligando A a B. Se o raio da base do cilindro mede $8cm$ e sua altura, $20\pi cm$, qual o comprimento do barbante.



Exercício 12. Uma fôrma de bolo tem formato cilíndrico de raio da base medindo $20cm$ e altura $8cm$. Qual o volume, em litros, de massa líquida de bolo que ela comporta se a altura máxima deve ser 75% da altura total, para permitir que o bolo cresça enquanto assa?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 13. Carlos é um rapaz viciado em beber refrigerante *diet*. Um dia, voltando do trabalho, ele passou em frente a uma companhia de gás, onde viu um enorme reservatório cilíndrico de $3m$ de altura com uma base de $2m$ de diâmetro e pensou...”Em quanto tempo eu beberia aquele reservatório inteiro, se ele estivesse cheio de refrigerante *diet*?”Considerando $\pi = 3,14$ e sabendo que Carlos bebe 3 litros de refrigerante *diet* por dia, pode-se afirmar que ele consumirá todo o líquido do reservatório em um período de:

a) 86 dias.

b) 86 meses.

c) 86 anos.

d) $8,6$ anos.

e) 860 meses.

Exercício 14. Um certo tipo de óleo de soja é vendido em duas latas cilíndricas distintas. A lata A de raio r está cheia de óleo até a altura h, a lata B tem raio $\frac{r}{2}$ e está cheia até a altura $2h$. A lata A é vendida por $R\$3,00$ e a lata B por $R\$1,40$. Podemos afirmar que:

a) a lata A é mais vantajosa para o consumidor.

b) não existe vantagem na compra de uma ou outra lata.

c) ambas as latas apresentam o mesmo volume.

d) a lata B apresenta o dobro do volume da lata A.

e) a lata B é mais vantajosa para o consumidor.

Exercício 15. O diâmetro da base de um cilindro reto tem $10cm$. Sabendo que a altura do cilindro é $12cm$, o seu volume é:

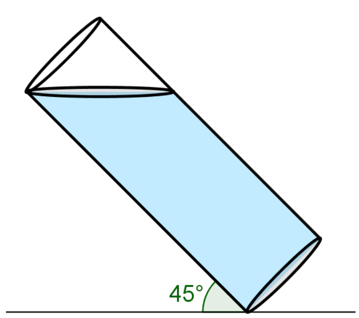
a) $120\pi cm^3$.

b) $300\pi cm^3$.

c) $1440\pi cm^3$.

d) $1200\pi cm^3$.

Exercício 16. Um copo cilíndrico está completamente cheio de água. Ele é inclinado formando um ângulo de $45°$ com a horizontal, sendo que parte da água derrama, conforme a figura. Se a altura do copo é quatro vezes o diâmetro da base, determine o percentual de água derramado em relação ao total de água que cabe no copo.



Exercício 17. Em muitas regiões do Estado do Amazonas, o volume de madeira de uma árvore cortada é avaliado de acordo com uma prática dessas regiões:

I- Dá-se uma volta completa em torno do tronco com um barbante.

II- O barbante é dobrado duas vezes pela ponta e, em seguida, seu comprimento (um quarto do inicial) é medido com fita métrica.

III- O valor obtido com essa medida é multiplicado por ele mesmo e depois multiplicado pelo comprimento do tronco. Esse é o volume estimado de madeira.

Outra estimativa pode ser obtida pelo cálculo formal do volume do tronco, considerando-se um cilindro perfeito. A diferença entre essas medidas é praticamente equivalente às perdas de madeira no processo de corte para comercialização. Pode-se afirmar que essas perdas são da ordem de:

a) 30%.

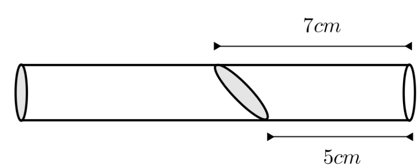
b) 22%.

c) 15%.

d) 12%.

e) 5%.

Exercício 18. Um salame, em forma de cilindro reto, tem $14cm$ de comprimento. Um corte é feito, dividindo-o em dois, conforme a figura. Se a massa do salame inteiro é $500g$, quanto é a massa de cada uma das partes?



Respostas e Soluções.

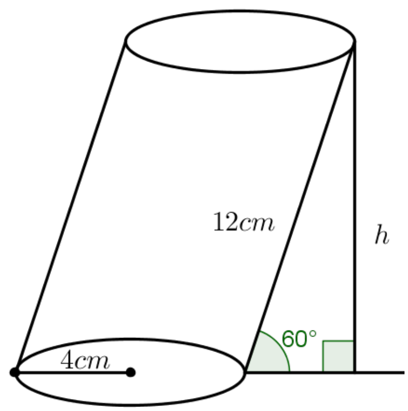
1. $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 10^2 \cdot 12 = 1200\pi cm^3$. $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi \cdot 10^2 + 2\pi \cdot 10 \cdot 12 = 440\pi cm^2$.

2.

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h \\ 640\pi &= \pi 8^2 h \\ 640 &= 64h \\ h &= 10cm. \end{aligned}$$

3. $V = \pi \cdot 5^2 \cdot 15 = 375cm^3$

4. Formando um triângulo retângulo com a altura e a geratriz do cilindro, temos que $\operatorname{sen} 60^\circ = \dfrac{h}{12}$, segue que $h = 6\sqrt{3}cm$. Assim, o volume é $V = \pi \cdot 4^2 \cdot 6\sqrt{3} = 96\sqrt{3}\pi cm^3$.



5. Se o cilindro é equilátero, então sua secção meridiana é um quadrado, ou seja, $h = 2r$. Temos então:

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h \\ 2 &= \pi(\frac{h}{2})^2 h \\ h^3 &= \frac{8}{\pi} \\ h &= \frac{2}{\sqrt[3]{\pi}} \\ h &= \frac{2\sqrt[3]{\pi^2}}{\pi} dm. \end{aligned}$$

6. Como a área da secção meridiana é um quadrado, temos que $h = 2r = 8cm$. Sendo assim, seu volume é $V = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 = 128\pi cm^3$.

7. Se a área lateral, A_l, é o quádruplo da área da base, A_b, temos:

$$\begin{aligned} A_l &= 4A_b \\ 2\pi rh &= 4\pi r^2 \\ \frac{h}{r} &= 2 \\ \frac{r}{h} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

8. Se o cilindro está inscrito em um cubo de aresta medindo $10cm$, sua altura mede $10cm$ e seu raio da base mede $5cm$. Sendo assim, seu volume é $V = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 = 250\pi cm^3$.

9. Sendo as medidas do raio e da altura do primeiro cilindro iguais a r e h, respectivamente, e a medida do raio do segundo cilindro igual a R, temos:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_2 \\ \pi r^2 h &= \pi R^2 2h \\ R^2 &= \frac{r^2}{2} \\ R &= \frac{\sqrt{2}}{2} r. \end{aligned}$$

Sendo assim, a medida do raio do segundo cilindro deve ser igual a $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ vezes a medida do raio do primeiro cilindro.

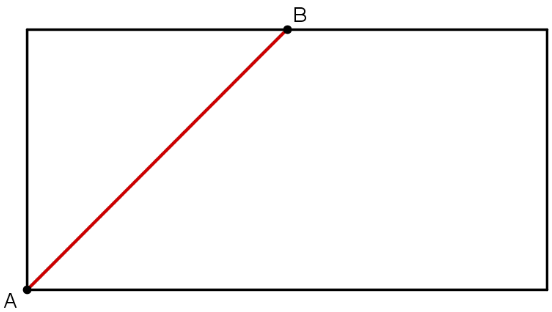
10. Neste tipo de problema, ocorre um deslocamento de volume de água, de altura h, no cilindro igual ao volume do cubo. Sendo assim, temos:

$$\begin{aligned} V_{cilindro} &= V_{cubo} \\ \pi r^2 h &= a^3 \\ \pi 30^2 h &= 5^3 \\ h &= \frac{5}{36\pi}. \end{aligned}$$

Como $\dfrac{5}{36\pi} < 10$, a nova altura do nível da água no cilindro é $(10 + \dfrac{5}{36\pi})cm$.

11. (Extraído da Vídeo Aula) Planificando a lateral do cilindro, obtemos um retângulo, como na figura abaixo. As dimensões do retângulo são $2\pi r = 16\pi cm$ por $20\pi cm$. Se A e B pertencem à secção meridiana e cada um pertence a uma base, então B é ponto médio do lado do retângulo. Dessa forma, temos um triângulo retângulo cujas extremidades da hipotenusa, h, são os pontos A e B. Aplicando o Teorema de Pitágoras, ficamos com:

$$\begin{aligned} h^2 &= (8\pi)^2 + (20\pi)^2 \\ h^2 &= 64\pi^2 + 400\pi^2 \\ h^2 &= 16(4\pi^2 + 25\pi^2) \\ h &= \sqrt{16 \cdot 29\pi^2} \\ h &= 4\pi\sqrt{29} cm. \end{aligned}$$



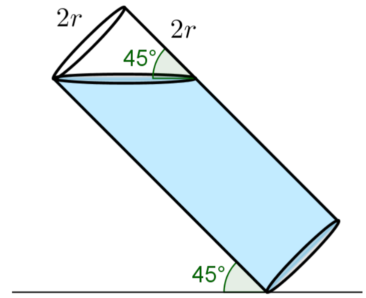
12. Como desejamos o volume em litros, devemos utilizar as medidas de comprimento em decímetros. Temos então que $V = \pi \cdot 1^2 \cdot 0,75 \cdot 0,8 \cong 1,88$ litros.

13. (Extraído da UFRJ) Inicialmente, devemos transformar as unidades do tanque de metros para decímetros, já que queremos o volume em litros. Sendo assim, o volume do tanque em litros é $V_t = 3,14 \cdot 10^2 \cdot 30 = 9420$. Como Carlos bebe 3 litros por dia, ele vai demorar $\dfrac{9420}{3} = 3140$ dias, que equivale aproximadamente a $8,6$ anos. Resposta D.

14. (Extraído da UEMS) Se $V_A = \pi r^2 h$ e $V_B = \pi(\dfrac{r}{2})^2 \cdot 2h = \dfrac{\pi r^2 h}{2}$, então $V_A = 2V_B$, ou seja, comprando duas latas B, o consumidor leva a mesma quantidade de óleo de uma lata A, mas por um preço menor, ou seja, a lata B é mais vantajosa para ele. Resposta E.

15. (Extraído da UEMG) $V = \pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 300\pi cm^2$. Resposta B.

16. Como a altura é quatro vezes o diâmetro da base, temos que o volume do copo cheio é $V = \pi r^2 \cdot 8r = 8\pi r^3$. Para o cálculo do volume derramado, vamos observar alguns detalhes: se o ângulo de inclinação é 45° e a lâmina d'água é paralela ao solo (ou tampo da mesa), então o ângulo entre esta e a parede do cilindro também é 45° (analisando um corte pela secção meridiana perpendicular ao solo); com isso, temos a formação de um triângulo retângulo isósceles nesta secção meridiana, com catetos medindo $2r$. Dessa forma, esse volume derramado é $V_d = \pi r^2 \cdot \dfrac{2r}{2} = \pi r^3$. Portanto, a quantidade de água derramada é $\dfrac{\pi r^3}{8\pi r^3} = \dfrac{1}{8} = 12,5\%$ da quantidade total de água quando o copo está cheio.



17. (Extraído do ENEM) Pelo cálculo prático do volume, temos $V_p = (\dfrac{2\pi r}{4})^2 \cdot h = \dfrac{\pi^2 r^2 h}{4} \cong 0{,}78\pi r^2 h = 0{,}78 V_f$, sendo V_f o volume calculado de maneira formal. Ou seja, a diferença de volumes é de 22%. Resposta B.

18. (Extraído da Vídeo Aula) Sendo V o volume do salame inteiro, temos que $V = \pi \cdot r^2 \cdot 14 = 14\pi r^2$, onde r a medida do raio da base do salame. O volume da menor parte, V_p, é $V_p = \pi r^2 \cdot \dfrac{5+7}{2} = 6\pi r^2$, ou seja, $V_p = \dfrac{6}{14} \cdot V$, portanto sua massa é $\dfrac{6}{14} \cdot 500 \cong 214g$ e, por consequência, o pedaço maior tem aproximadamente $500 - 214 = 286g$ de massa.

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com