

Tópicos Adicionais

Desigualdades



1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Se $x \geq 0$, prove que $1 + x \geq 2\sqrt{x}$.

Exercício 2. Mostre que $x^2 + y^2 \geq 2xy$ quaisquer que sejam os reais x e y .

Exercício 3. Para todo ângulo agudo α , mostre que $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha \geq 2$.

Exercício 4. Prove que se $a + b = 1$, em que a e b são números positivos, então

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

Exercício 5. Prove que dados três números positivos a, b e c , vale que

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$

Exercício 6. Considere 6 números positivos $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$. Prove a seguinte desigualdade:

$$\sqrt[3]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3)} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} + \sqrt[3]{b_1 b_2 b_3}.$$

Exercício 7. Dados n números positivos $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Prove que

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

Exercício 8. Prove que para quaisquer dois números positivos a e b temos

$$\sqrt[n+1]{ab^n} \leq \frac{a + bn}{n + 1},$$

com igualdade ocorrendo se, e somente se, $a = b$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 9. Para quais valores reais de x a fração abaixo atinge o seu valor mínimo?

$$\frac{a + bx^4}{x^2}. \quad (a \text{ e } b \text{ positivos}).$$

Exercício 10. Prove que a soma dos comprimentos dos catetos de um triângulo retângulo nunca excede $\sqrt{2}$ vezes a hipotenusa do triângulo.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 11. Sejam a, b, c reais não-negativos, prove que:
 $a^3 + b^3 + c^3 + 15abc \leq 2(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)$

Exercício 12. Prove que $(a + b)(a + c) \geq 2\sqrt{abc(a + b + c)}$ para quaisquer números reais a, b e c .

Exercício 13. Sejam a, b e c números reais positivos. Prove que

$$\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} \geq \frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a}.$$

Exercício 14. Prove que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > n(\sqrt[n]{n+1} - 1).$$

Exercício 15. Mostre que $\frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2$.

Exercício 16. Se $a_i > 0$, para $i = 1, 2, \dots, n$ e $a_1 a_2 \dots a_n = 1$, mostre que

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n.$$

Exercício 17. Para $a, b, c, d \geq 0$, mostre que

$$\sqrt{(a + c)(b + d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

Exercício 18. Mostre que para quaisquer números reais a, b, c temos

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$$

Exercício 19. Se a, b, c são reais positivos, mostre que

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{a + c} + \frac{c}{a + b} \geq \frac{3}{2}.$$

Exercício 20. Se $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, mostre que

$$-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1.$$

Exercício 21. Se a_1, a_2, \dots, a_n são números reais positivos, mostre que

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$$

Exercício 22. Se a, b, c, d são números reais positivos, mostre que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a + b + c + d}.$$

Exercício 23. Seja $P(x)$ um polinômio com coeficientes inteiros positivos. Prove que

$$P\left(\frac{1}{x}\right) \geq \frac{1}{P(x)}$$

para todo $x > 0$.

Respostas e Soluções.

1. Como todo quadrado de um número real é não negativo, segue que

$$\begin{aligned}(\sqrt{x} - 1)^2 &\geq 0 \\ x + 1 &\geq 2\sqrt{x}.\end{aligned}$$

2. Como $(x - y)^2 \geq 0$, segue que $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

3. Como $\alpha \in (0, \pi/2)$, segue que $\sin \alpha, \cos \alpha > 0$. Daí, pela desigualdade MA-MG, segue que

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha \geq 2\sqrt{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = 2.$$

4. Pela Desigualdade MA-MG, temos

$$\begin{aligned}1 &= a + b \\ &\geq 2\sqrt{ab} \\ \frac{1}{ab} &\geq 4. \\ \text{e} \\ a^2 + b^2 &\geq 2ab \\ 2(a^2 + b^2) &\geq (a + b)^2\end{aligned}$$

A expansão dos membros do lado esquerdo e a Desigualdade MA-MG produz

$$\begin{aligned}\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 &= \\ \left(a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}\right) + \left(b^2 + 2 + \frac{1}{b^2}\right) &= \\ \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + (a^2 + b^2) + 4 &\geq \\ \frac{2}{ab} + \frac{(a + b)^2}{2} + 4 &\geq \\ 8 + \frac{1}{2} + 4 &= \frac{25}{2}.\end{aligned}$$

5. Pela Desigualdade MA-MG, temos

$$\begin{aligned}a + b &\geq 2\sqrt{ab} \\ b + c &\geq 2\sqrt{bc} \\ a + c &\geq 2\sqrt{ac}\end{aligned}$$

Multiplicando as desigualdades anteriores, temos

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$

6. Elevando ambos os membros da desigualdade ao cubo, precisamos mostrar que

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3) &\geq a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3 + \\ &+ 3\sqrt[3]{(a_1a_2a_3)^2b_1b_2b_3} + \\ &+ 3\sqrt[3]{a_1a_2a_3(b_1b_2b_3)^2}.\end{aligned}$$

O desenvolvimento de $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3)$, nos produz a soma

$$\begin{aligned}a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3 &= \\ a_1a_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3 &+ \\ a_1b_2b_3 + b_1a_2b_3 + b_1b_2a_3.\end{aligned}$$

para concluir o problema, basta aplicar a Desigualdade MA-MG nos termos:

$$\begin{aligned}a_1a_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3 &\geq 3\sqrt[3]{(a_1a_2a_3)^2b_1b_2b_3} \\ a_1b_2b_3 + b_1a_2b_3 + b_1b_2a_3 &\geq 3\sqrt[3]{a_1a_2a_3(b_1b_2b_3)^2}.\end{aligned}$$

7. Pela Desigualdade MA-MG, temos

$$\begin{aligned}\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} &\geq \\ n\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_1}} &= \\ n. &\end{aligned}$$

8. Pela Desigualdade MA-MG, temos

$$\begin{aligned}\frac{a + bn}{n + 1} &= \frac{a + b + b + b + \dots + b}{n + 1} \\ &\geq \sqrt[n]{ab^n}.\end{aligned}$$

9. Pela Desigualdade MA-MG, temos

$$\begin{aligned}a + bx^4 &\geq 2x^2\sqrt{ab} \\ \frac{a + bx^4}{x^2} &\geq 2\sqrt{ab}\end{aligned}$$

Portanto, o valor mínimo da expressão dada é $2\sqrt{ab}$ e ocorre quando $a = bx^4$, ou seja, $x = \pm\sqrt[4]{a/b}$.

10. Sejam a e b os catetos de um triângulo retângulo e c a sua hipotenusa. Pela Desigualdade MA-MG e o Teorema de Pitágoras, temos

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &\leq 2(a^2 + b^2) \\ &= 2c^2.\end{aligned}$$

Daí,

$$a + b \leq \sqrt{2}c.$$

11. Expandindo os termos do lado esquerdo e cancelando os termos comuns, é suficiente mostrar que

$$a^3 + b^3 + c^3 + 2ab^2 + 2ba^2 + 2ac^2 + 2a^2c + 2b^2c + 2bc^2 \geq 15abc.$$

Para verificar isso, basta rescrever a soma do lado esquerdo em mais parcelas e aplicar a Desigualdade MA-MG:

$$\begin{aligned}a^3 + b^3 + c^3 + (ab^2 + ab^2) + (a^2b + a^2b) &+ \\ (a^2c + a^2c) + (ac^2 + ac^2) + (b^2c + b^2c) + (bc^2 + bc^2) &\geq \\ 15\sqrt[15]{a^{15}b^{15}c^{15}} &= \\ 15abc.\end{aligned}$$

12. Como

$$\begin{aligned}(a+b)(a+c) &= a^2 + ac + ab + bc \\ &= bc + a(a+b+c),\end{aligned}$$

pela Desigualdade MA-MG, temos

$$bc + a(a+b+c) \geq \sqrt{abc(a+b+c)}.$$

13. Como $(a+b)^2 \geq 4ab$, segue que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}.$$

Usando as expressões análogas para os pares (a, c) e (b, c) , temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} &= \\ \left(\frac{1}{4a} + \frac{1}{4b}\right) + \left(\frac{1}{4a} + \frac{1}{4c}\right) + \left(\frac{1}{4b} + \frac{1}{4c}\right) &\geq \\ \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}.\end{aligned}$$

14. Pela desigualdade MA-MG, temos

$$\begin{aligned}1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i+1}{i} \\ &\geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \frac{i+1}{i}} \\ &= \sqrt[n]{n+1}.\end{aligned}$$

15. Pela Desigualdade MA-MG, temos

$$\begin{aligned}\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} &= \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ &\geq 2.\end{aligned}$$

16. Pela Desigualdade MA-MG, temos

$$\frac{1+a_i}{2} \geq \sqrt{a_i}.$$

Multiplicando essas Desigualdades para $i = 1, 2, \dots, n$, temos

$$\begin{aligned}(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) &\geq \\ (2\sqrt{a_1})(2\sqrt{a_2})\dots(2\sqrt{a_n}) &= 2^n.\end{aligned}$$

17. Elevando ambos os membros da desigualdade ao quadrado, temos

$$\begin{aligned}(a+c)(b+d) &\geq ab + 2\sqrt{abcd} + cd \Leftrightarrow \\ ad + cb &\geq 2\sqrt{abcd}\end{aligned}$$

Pela Desigualdade MA-MG, segue que

$$ad + cb \geq 2\sqrt{(ad)(cb)}$$

e isso conclui a demonstração.

18. Pela Desigualdade MA-MG, temos

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &\geq 2ab \\ a^2 + c^2 &\geq 2ac \\ b^2 + c^2 &\geq 2bc\end{aligned}$$

Somando as desigualdades anteriores, temos

$$\begin{aligned}2(a^2 + b^2 + c^2) &\geq 2(ab + ac + bc) \\ a^2 + b^2 + c^2 &\geq ab + ac + bc\end{aligned}$$

19. Se $A = a(b+c) + b(a+c) + c(a+b) = 2(ab + ac + bc)$, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}A \cdot \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right) &\geq (a+b+c)^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + A.\end{aligned}$$

Pelo exercício anterior, segue que $a^2 + b^2 + c^2 \geq A/2$. Portanto,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3A}{2A} = \frac{3}{2}.$$

20. Como $(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \geq 0$, segue que

$$\begin{aligned}2(a^2 + b^2 + c^2) &\geq 2(ab + ac + bc) \\ 1 &\geq ab + ac + bc.\end{aligned}$$

Além disso, como $(a+b)^2 + (a+c)^2 + (b+c)^2 \geq 0$, segue que

$$\begin{aligned}2(a^2 + b^2 + c^2) &\geq -2(ab + ac + bc) \\ 1/2 &\geq -(ab + ac + bc).\end{aligned}$$

21. Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, com $u = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $v = (\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n})$. Temos

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) &\geq \\ (1 + 1 + \dots + 1)^2 &= \\ n^2.\end{aligned}$$

22. Como $(a-b)^2 \geq 0$, segue que $(a+b)^2 \geq 4ab$ e daí

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}.$$

Portanto, o uso reiterado dessa desigualdade nos permite concluir que

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} &\geq \\ \frac{4}{a+b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} &\geq \\ \frac{16}{a+b+c} + \frac{16}{d} &\geq \\ \frac{64}{a+b+c+d}.\end{aligned}$$

23. Seja $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Para $x = 1$, precisamos mostrar que

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq \frac{1}{a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n}.$$

Isso é equivalente a mostrar que

$$(a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \geq 1.$$

Como os coeficientes do polinômio são positivos, é verdade que

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq 1$$

e isso demonstra a desigualdade anterior. Para o caso geral, pela Desigualdade De Cauchy-Schwarz, com $u = (a_0, a_1/x, \dots, a_n/x^n)$ e $v = (a_0, a_1x, \dots, a_nx^n)$, temos

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{x}\right) \cdot P(x) &= \\ \left(\sum_{i=0}^n \frac{a_i}{x^i}\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i\right) &\geq \\ (a_0 + a_1 + \dots + a_n)^2 &\geq \\ 1^2 &= 1. \end{aligned}$$