Módulo de Plano Cartesiano e Sistemas de Equações

O Plano Cartesiano

7° ano E.F.

Professores: Tiago Miranda e Cleber Assis

Portal da Matemática
OBMEP

Plano Cartesiano e Sistemas de Equações
O Plano Cartesiano

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Observe o plano cartesiano abaixo e escreva em qual quadrante estão todos os pontos e suas respectivas coordenadas.

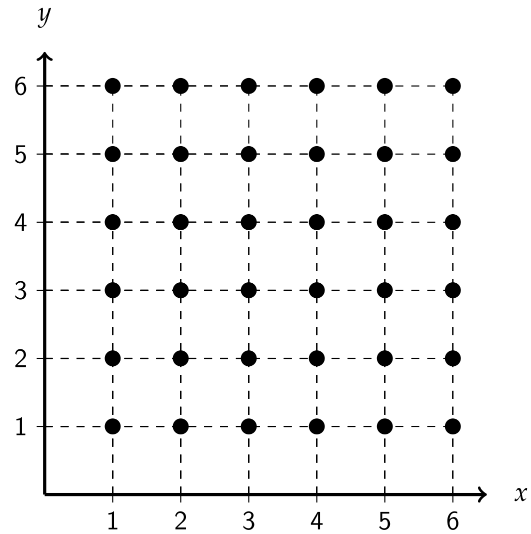

Figura 1

Exercício 2. Marque no plano cartesiano os pontos:

$$A(-1, 1), B(-2, -3), C(0, 2), D(3, 0) \text{ e } E(3, -2),$$

determinando os seus respectivos quadrantes.

Exercício 3. Analisando o gráfico abaixo, responda o que se pede.

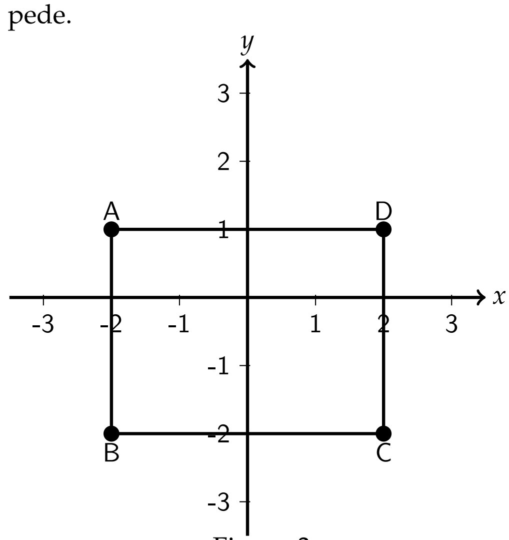

Figura 3

a) quais os pares ordenados dos vértices?

b) qual a área do retângulo?

c) qual o perímetro do retângulo?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 4. Observando o plano cartesiano abaixo, responta:

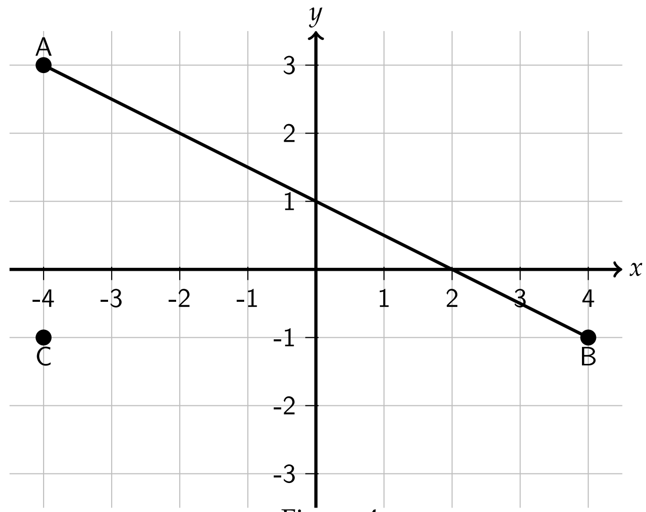

Figura 4

a) No segmento destacado, quantos são os pontos de coordenadas inteiras? Quais são esses pontos?

b) Quais os pontos do segmento também pertencem aos eixos coordenados?

c) Qual a área do triângulo ABC?

Exercício 5. Com relação ao círculo abaixo, responda:

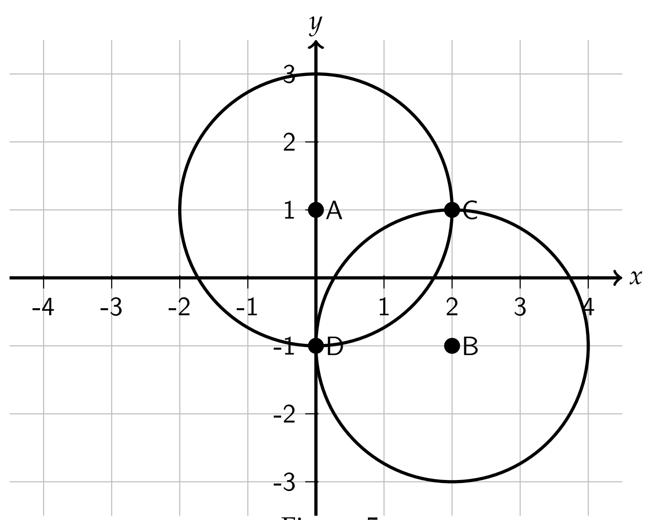

Figura 5

a) Quais as coordenadas dos pontos A e B?

b) Quais as coordenadas dos pontos de interseção das circunferências?

c) Uma terceira circunferência tem centro em C e é tangente às duas circunferências exibidas, qual o valor de seu raio?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 6. Se $a < 0$ e $b > 0$, os pontos $P(a;-b)$ e $Q(b;-a)$ pertencem respectivamente a quais quadrantes?

Exercício 7. Em um jogo de tabuleiro para dois participantes, em cada rodada o atacante lança um dado e o defensor lança outro. O atacante vence se o número obtido no lançamento se seu dado for maior do que o número obtido no lançamento do dado defensor. Caso contrário, vence o defensor. Os dados utilizados nesse jogo são dados convencionais, em formato cúbico, com suas faces numeradas de 1 a 6. Qual a probabilidade do atacante vencer uma rodada ?

Exercício 8. Os vértices da base de um triângulo isósceles são os pontos $(1,-1)$ e $(-3,4)$ de um sistema de coordenadas cartesianas retangulares. Qual a ordenada do terceiro vértice, se ele pertence ao eixo das ordenadas?

Exercício 9. Quais as coordenadas (x,y) do ponto D do paralelogramo $ABCD$ sabendo que $A = (5,4)$, $B = (-1,2)$ e $C = (-3,-6)$?

Exercício 10. A distância d entre dois pontos A e B pode ser calculada pela fórmula

$$d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Agora, sejam os pontos $A(3,-2)$ e $B(5,4)$. Qual a medida do segmento de reta $\overline{AB}$?

Exercício 11. Os vértices da base de um triângulo isósceles são os pontos $(1,-1)$ e $(-3,4)$ de um sistema de coordenadas cartesianas retangulares. Qual a ordenada do terceiro vértice se ele pertence ao eixo das ordenadas?

Exercício 12. Os pontos $P(1,3)$ e $Q(6,3)$ são vértices do triângulo PQR. Sabe-se que o lado PR mede 3 cm e o lado QR mede 4 cm. Quais as possíveis coordenadas do ponto R ?

Respostas e Soluções.

1. O gráfico possui todos os pontos marcados no primeiro quadrante e as coordenadas são:

$$\begin{array}{c}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\\(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\\(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\\(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\\(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\\(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\end{array}$$

2. Marcando os pontos solicitados, teremos a figura a seguir:

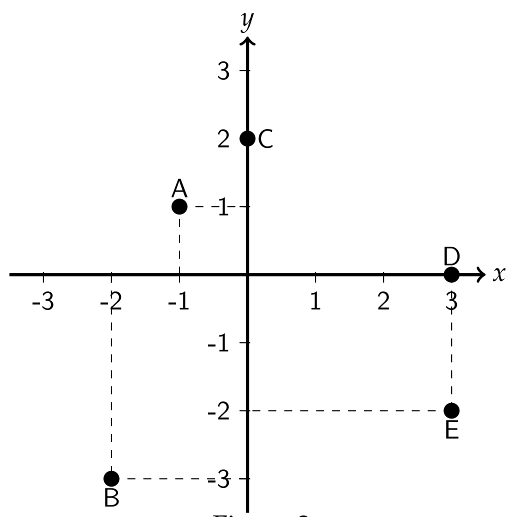

Figura 2

Para completar, A está no II quadrante, B está no III, C está no semieixo positivo das ordenadas, D está no semieixo positivo das abscissas, E está no quarto.

3. Com relação ao retângulo temos

a) Os vértices são: $A(-2,1)$, $B(-2,-2)$, $C(2,-2)$ e $D(2,1)$.

b) O comprimento é dado por $2-(-2)=4$ e a altura é $1-(-2)=3$, logo, a área é igual a $4\times 3=12$ *u.a.*.

c) O perímetro pode ser calculado por

$$2\times 4+2\times 3=14 \ u.c.$$

4.

a) No segmento, estão 5 pontos de coordenadas inteiras: $(-4,3)$, $(-2,2)$, $(0,1)$, $(2,0)$ e $(4,-1)$.

b) O segmento corta Oy em $(0,1)$ e Ox em $(2,0)$.

c) As medidas de AC e BC são 4 e 8. E como $AC\perp BC$, a área é igual a $\dfrac{4\cdot 8}{2}=16$ u.a..

5.

a) Temos $A=(0,1)$ e $B=(-1,2)$.

b) Temos $C=(2,1)$ e $D=(0,-1)$.

c) Sendo C o centro e dado que a circunferência é tangente às duas que estão já desenhadas possuindo diâmetro 4, então o raio da nova circunferência mede 4 u.c..

6. (Adaptado do vestibular da CESCEM)
Sendo $a<0$, então $-a>0$ e, para $b>0$, temos $-b<0$. Portanto, o ponto P tem abscissa e ordenada negativas, logo está no $3\circ$ quadrante. Para o ponto Q, temos abscissa e ordenada positivas, então ele está no 1° quadrante.

7. Temos que a probabilidade de ganhar varia de acordo com o dado do atacante. Observe os pares (x,y), onde x é o valor que o atacante obteve e y o valor do defensor. As vitórias do atacante são os pares do conjunto:

$$\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\},$$

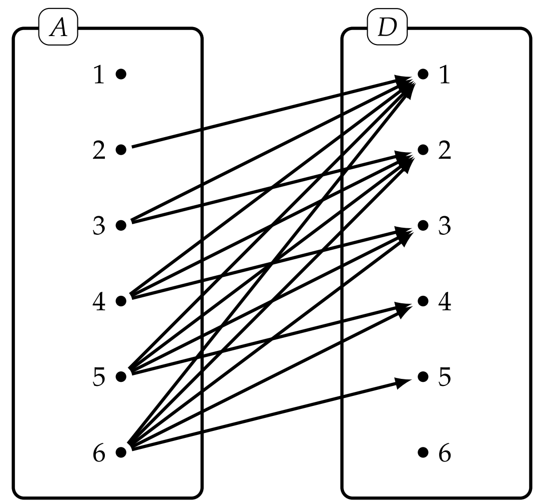

Figura 6

Esse é um subconjunto do universo que e possui $6\times 6=36$ pares ordenados. Logo, a probabilidade é igual a

$$\frac{15}{36}=\frac{5}{12}.$$

8. (Extraído do vestibular da VUNESP (SP))
Todo ponto sobre o eixo das ordenadas tem $x=0$ como abscissa. Agora, seja $C(0,y)$ o terceiro vértice. Como o triângulo é isósceles e os vértices da base foram dados, temos que as distâncias de C aos pontos dados no

enunciados são iguais. Logo

$$\sqrt{(0-1)^2+(y-(-1))^2} = \sqrt{(0-(-3))^2+(y-4)^2}$$
$$1+y^2+2y+1 = 9+y^2-8y+16$$
$$y = \frac{23}{10}.$$

9. (Adaptado do vestibular da Cescem)

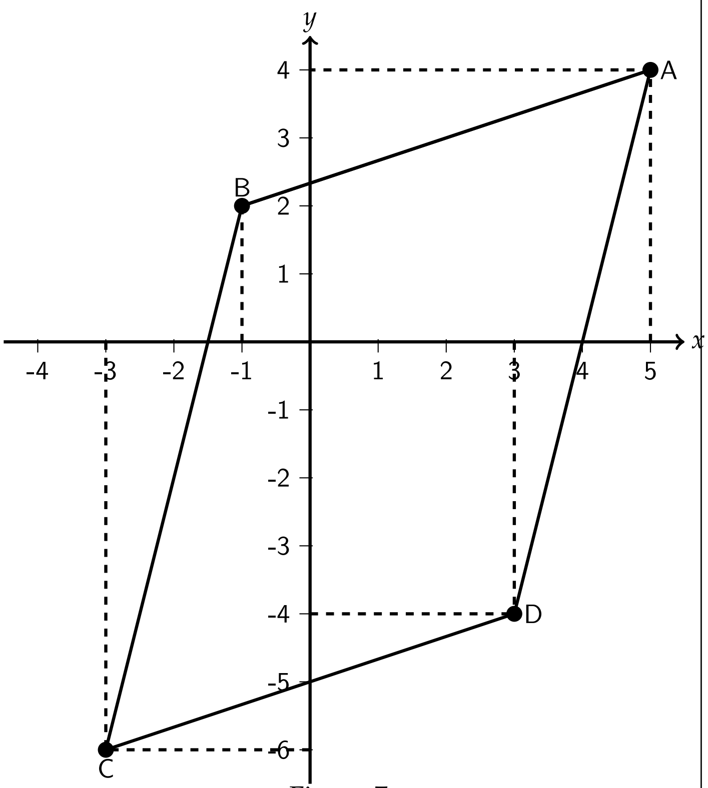

Figura 7

Sendo um paralelogramo, os pontos médios das diagonais coincidem. Como as coordenadas do ponto médio de um segmento é dado pela média aritmética das coordenadas de seus vértices, temos:

$$\frac{x+(-1)}{2} = \frac{5+(-3)}{2}$$
$$\frac{y+2}{2} = \frac{4+(-6)}{2}$$

Portanto, $x = 3$ e $y = -4$.

10. (Adaptado do vestibular da UNIFOR (CE))
A medida do segmento $\overline{AB}$ será igual a distância entre os pontos A e B, que pode ser calculada por

$$d_{AB} = \sqrt{(5-3)^2+(4-(-2))^2} = 2\sqrt{10}\ u.c..$$

11. (Extraído do vestibular da VUNESP (SP))
Todo ponto sobre o eixo das ordenadas tem $x = 0$ como abscissa. Agora, seja $C = (0, y)$ o terceiro vértice. Como o triângulo é isósceles de e os vértices da base foram dados, teremos que as distâncias de C a tais pontos são iguais, ou seja,

$$\sqrt{(0-1)^2+(y-(-1))^2} = \sqrt{(0-(-3))^2+(y-4)^2}$$
$$1+y^2+2y+1 = 9+y^2-8y+16$$
$$y = \frac{23}{10}.$$

12. (Adaptado do vestibular da UEL (PR))
Sendo $R = (x, y)$, podemos construir o sistema:
$$\begin{cases} d_{PR} = \sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2} = 3 \\ d_{QR} = \sqrt{(x-6)^2+(y-3)^2} = 4 \end{cases}$$
Resolvendo-o, teremos $R = (2,8; 5,4)$ ou $R = (2,8; 0,6)$.

Outra solução:

Como $PR = 3$, $QR = 4$, e $PQ = \sqrt{(1-6)^2+(3-3)^2} = 5$, pela recíproca do Teorema de Pitágoras, segue que $\triangle PQR$ é retângulo em R, com hipotenusa PQ, e catetos PR e QR. Sendo h a altura do triângulo, a ordenada de R será igual a $3+h$ ou, por simetria, $3-h$. Usando as relações métricas no triângulo retângulo, obtemos $h = 2,4$. Sendo m a projeção de PQ sobre a hipotenusa, a abscissa de R será igual a $1+m$ e, usando que $3^2 = m \cdot 5$, teremos $m = \frac{9}{5} = 1,8$. Então $R(2,8; 5,4)$ ou $R(2,8; 0,6)$.

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com