Inequações Produto e Quociente de Primeiro Grau

Inequações Produto

1° **ano E.M.**

Inequações Produto e Quociente de Primeiro Grau
Inequações Produto

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $(x+2)(2x-1) > 0$.

Exercício 2. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $(x-1)(x-2) < 0$.

Exercício 3. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $(x-1)(3-x) < 0$.

Exercício 4. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $(x-3)^3(x-5)^5 < 0$.

Exercício 5. O conjunto solução de $(x-1)(x-6) > 0$ em $U = \mathbb{R}$ é da forma $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$. Determine o valor de $a \cdot b$.

Exercício 6. O conjunto solução de $(x-3)(x-9) > 0$ em $U = \mathbb{R}$ é da forma $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$. Determine o valor de $a \cdot b$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 7. Determine o conjunto solução de

$$(x-1)^3(x-6) < 0$$

em $U = \mathbb{R}$.

Exercício 8. O conjunto solução de $(x-5)^{11}(x-10) < 0$ em $U = \mathbb{R}$ é da forma (a, b). Determine o valor de $a \cdot b$.

Exercício 9. O conjunto solução de $(x-3)^7(x-9) < 0$ em $U = \mathbb{R}$ é da forma (a, b). Determine o valor de $a \cdot b$.

Exercício 10. O conjunto solução de $(x-4)^9(x-10) < 0$ em $U = \mathbb{R}$ é da forma (a, b). Determine o valor de $a \cdot b$.

Exercício 11. Determine o conjunto solução da inequação

$$\frac{1}{3} < \frac{x}{2} + 3 < \frac{13}{3},$$

sendo $U = \mathbb{Q}$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 12. O conjunto solução de $(x-1)^6(x-6)^3 > 0$ em $U = \mathbb{R}$ é da forma $(a, +\infty)$. Determine o valor de a.

Exercício 13. O conjunto solução de $(x-1)^6(x-11)^3 > 0$ em $U = \mathbb{R}$ é da forma $(a, +\infty)$. Determine o valor de a.

Exercício 14. O conjunto solução de

$$(2x-2)(x-1)(x-6) > 0$$

em $U = \mathbb{R}$ é da forma $(a, +\infty)$. Determine o valor de a.

Exercício 15. O conjunto solução de

$$(2x-10)(x-5)(x-8) > 0$$

em $U = \mathbb{R}$ é da forma $(a, +\infty)$. Determine o valor de a.

Exercício 16. O conjunto solução de

$$(2x-8)(x-4)(x-10) > 0$$

em $U = \mathbb{R}$ é da forma $(a, +\infty)$. Determine o valor de a.

Exercício 17. O conjunto solução da desigualdade

$$(x-2)(x-4)(x-7) > 0$$

em $U = \mathbb{R}$ é da forma $(ab) \cup (c, +\infty)$. Determine o valor de $c(b-a)$.

Exercício 18. Determine o conjunto solução da desigualdade

$$(x-3)(x-4)(x-11) > 0$$

em $U = \mathbb{R}$

Exercício 19. Determine o conjunto solução da desigualdade

$$(x-1)(x-2) + (x-1) > 0$$

em $U = \mathbb{R}$.

Exercício 20. Determine o conjunto solução da desigualdade

$$(x-3)(x-1) + 4(x-1) > 0$$

em $U = \mathbb{R}$.

Exercício 21. Para quais valores de $x \in \mathbb{R}$ é verdade que

$$7 < 2\sqrt{x} - 3 < \frac{21}{2}?$$

Exercício 22. João escreveu alguns números reais não nulos, todos distintos, na lousa de modo que se tomarmos qualquer um deles e o elevarmos ao quadrado o resultado é maior que o produto de quaisquer outros dois números escritos na lousa.

(a) Explique por que não pode haver três reais positivos escritos na lousa.

(b) Explique por que não pode haver três reais negativos escritos na lousa.

(c) Explique por que não pode haver dois números positivos e dois números negativos escritos na lousa.

(d) Determine a maior quantidade possível de números escritos na lousa com um exemplo de um conjunto de números que satisfaz a condição requerida.

Exercício 23. Determine os possíveis valores racionais de x na inequação abaixo.

$$(2x-4) \cdot (15-3x) > 0.$$

Exercício 24. Uma desigualdade simples, mas bastante útil é $x^2 \geq 0$, para todo x real. Para prová-la, basta estudar separadamente as seguintes possibilidades: $x > 0$, $x < 0$ ou $x = 0$. De fato, um número real positivo multiplicado por um número real positivo é positivo, um número real negativo multiplicado por outro número real negativo é também positivo e, finalmente, $0 \cdot 0 = 0$. Usando a desigualdade anterior, verifique que para quaisquer números reais x e y vale que:

a) $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

b) $x^2 + xy + y^2 \geq 0$.

Exercício 25. Se a, b, c, d são números reais positivos, mostre que

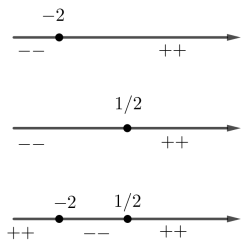
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}.$$

Respostas e Soluções.

1. Temos

$$\begin{aligned} x+2>0 &\quad\Leftrightarrow\quad x>-2\\ 2x-1>0 &\quad\Leftrightarrow\quad x>1/2 \end{aligned}$$

Esses dados podem ser representados no diagrama:



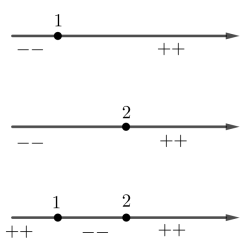
Assim, o conjunto solução da inequação é

$$S=(-\infty,-2)\cup(1/2,+\infty).$$

2. Temos

$$\begin{aligned} x-1>0 &\quad\Leftrightarrow\quad x>1\\ x-2>0 &\quad\Leftrightarrow\quad x>2 \end{aligned}$$

Esses dados podem ser representados no diagrama:



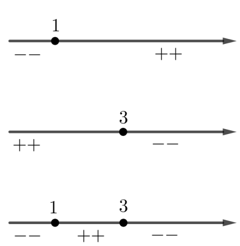
Assim, o conjunto solução da inequação é

$$S=(1,2).$$

3. Temos

$$\begin{aligned} x-1>0 &\quad\Leftrightarrow\quad x>1\\ 3-x>0 &\quad\Leftrightarrow\quad 3>x \end{aligned}$$

Esses dados podem ser representados no diagrama:



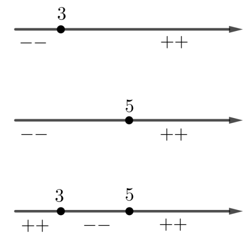
Assim, o conjunto solução da inequação é

$$S=(-\infty,1)\cup(3,+\infty).$$

4. Temos

$$\begin{aligned} (x-3)^3>0 &\quad\Leftrightarrow\quad x>3\\ (x-5)^5>0 &\quad\Leftrightarrow\quad x>5 \end{aligned}$$

Esses dados podem ser representados no diagrama:



Assim, o conjunto solução da inequação é

$$S=(-\infty,3)\cup(5,+\infty).$$

5. Como $x-c>0$ se $x>c$ e $x-c<0$ se $x<c$, segue que $x-1$ e $x-6$ possuem mesmo sinal apenas quando $x<1$ ou $x>6$. Portanto o conjunto solução é $(-\infty,1)\cup(6,\infty)$. Daí $a\cdot b=6$.

6. Como $x-c>0$ se $x>c$ e $x-c<0$ se $x<c$, segue que $x-3$ e $x-9$ possuem mesmo sinal apenas quando $x<3$ ou $x>9$. Portanto o conjunto solução é $(-\infty,3)\cup(9,+\infty)$. Daí $a\cdot b=27$.

7. Como $x-c>0$ se $x>c$ e $x-c<0$ se $x<c$, segue que $(x-1)^3$ e $x-6$ possuem sinais opostos apenas quando $x>1$ e $x<6$. Portanto, o conjunto solução é $(1,6)$.

8. Como $x-c>0$ se $x>c$ e $x-c<0$ se $x<c$, segue que $(x-5)^{11}$ e $x-10$ possuem sinais opostos apenas quando $x>5$ e $x<10$. Portanto, o conjunto solução é $(5,10)$. Daí $a\cdot b=50$.

9. Como $x-c>0$ se $x>c$ e $x-c<0$ se $x<c$, segue que $(x-3)^7$ e $x-9$ possuem sinais opostos apenas quando $x>3$ e $x<9$. Portanto, o conjunto solução é $(3,9)$. Daí $a\cdot b=27$.

10. Como $x-c>0$ se $x>c$ e $x-c<0$ se $x<c$, segue que $(x-4)^9$ e $x-10$ possuem sinais opostos apenas quando $x>4$ e $x<10$. Portanto, o conjunto solução é $(4,10)$. Daí $a\cdot b=40$.

11.

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{3}< & \dfrac{x}{2}+3 & <\dfrac{13}{3}\\ \dfrac{1}{3}-3< & \dfrac{x}{2} & <\dfrac{13}{3}-3\\ \dfrac{1}{3}-\dfrac{9}{3}< & \dfrac{x}{2} & <\dfrac{13}{3}-\dfrac{9}{3}\\ -\dfrac{8}{3}< & \dfrac{x}{2} & <\dfrac{4}{3}\\ 2(-\dfrac{8}{3})< & 2\cdot\dfrac{x}{2} & <2\cdot\dfrac{4}{3}\\ -\dfrac{16}{3}< & x & <\dfrac{8}{3}. \end{array}$$

Portanto, $S=\{x\in\mathbb{Q},-\dfrac{16}{3}<x<\dfrac{8}{3}\}$.

12. Como $(x-1)^6(x-6)^3$ tem o mesmo sinal que $x-6$ para $x \neq 1$ e $x \neq 6$. Daí $a = 6$.

13. Como $(x-1)^6(x-11)^3$ tem o mesmo sinal que $x-11$ para $x \neq 1$ e $x \neq 11$. Daí $a = 11$.

14. Como $(2x-2)(x-1)(x-6) = 2 \cdot (x-1)^2(x-6)$, o sinal da expressão é determinado por $x-6$ para $x \neq 1$. Portanto, $a = 6$.

15. Como $(2x-10)(x-5)(x-8) = 2 \cdot (x-5)^2(x-8)$, o sinal da expressão é determinado por $x-8$ para $x \neq 5$. Portanto, $a = 8$.

16. Como $(2x-8)(x-4)(x-10) = 2 \cdot (x-4)^2(x-10)$, o sinal da expressão é determinado por $x-10$ para $x \neq 4$. Portanto, $a = 10$.

17. Temos que $x-c > 0$ se $x > c$ e $x-c < 0$ se $x < c$. Além disso, como $2 < 4 < 7$, segue que o conjunto solução é $(ab) = (2,4) \cup (7,+\infty)$. Assim $c \cdot (b-a) = 14$.

18. Temos que $x-c > 0$ se $x > c$ e $x-c < 0$ se $x < c$. Além disso, como $3 < 4 < 11$, segue que o conjunto solução é $(a,b) = (3,4) \cup (11,+\infty)$.

19. Como $(x-1)(x-2)+(x-1) = (x-1)[(x-2)+1] = (x-1)^2$, segue que o conjunto solução é $\mathbb{R} - \{1\}$.

20. Como $(x-3)(x-1)+4(x-1) = [(x-3)+4](x-1) = x^2-1^2$. Como $x^2 > 1 \Leftrightarrow x < -1$ ou $x > 1$, o conjunto solução é

$$(-\infty,-1) \cup (1,+\infty).$$

21. A desigualdade dada é equivalente a

$$5 < \sqrt{x} < \frac{27}{4}.$$

Elevando todos os membros ao quadrado, é necessário que

$$25 < x < \frac{729}{16}.$$

As desigualdades anteriores também são suficientes para x satisfazer a desigualdade original. Portanto, o conjunto solução é

$$S = \left(25, \frac{729}{16}\right)$$

22.

(a) Suponha, por absurdo, que há três números positivos escritos na lousa, digamos $0 < a < b < c$. Então $a^2 < bc$ e isso contradiz a condição do enunciado.

(b) Suponha, por absurdo, que há três números negativos escritos na lousa, digamos $a < b < c < 0$. Então $0 < -c < -b < -a$ e, repetindo o argumento do item anterior, temos $c^2 = (-c)^2 < (-b)(-a) = ab$. Isso contradiz a condição do enunciado.

(c) Suponha que temos dois números negativos e dois positivos escritos na lousa, digamos $a < b < 0 < c < d$. Se $|b| \leq |c|$, teremos $b^2 = |b|^2 < |c| \cdot |d| = cd$ e se $|b| > |c|$, então $c^2 = |c|^2 < |b| \cdot |a| = ba$. Nos dois casos, o conjunto de números não pode satisfazer a condição do enunciado.

(d) Não podemos ter mais que 3 elementos, pois caso existam 4 ou mais acontecerá um dos três casos anteriores. Para mostrar que 3 é realmente o máximo, basta exibir um exemplo com essa quantidade. Considere o conjunto $\{-2,1,2\}$. A condição do enunciado é satisfeita, pois $(-2)^2 > 1 \cdot 2$, $1^2 > (-2) \cdot 2$ e $2^2 > (-2) \cdot 1$.

23. Se $(2x-4) \cdot (15-3x) > 0$, não podemos ter $x = 2$ e $x = 5$ (1). Se ambos os termos são positivos, ou seja, $x > 2$ e $x < 5$, segue que $2 < x < 5$ (2). Se ambos os termos são negativos, temos $x < 2$ e $x > 5$ e isso claramente é impossível. De (1) e (2), segue que o conjunto solução é formado pelos números $x \in \mathbb{Q}$, tais que $2 < x < 5$.

24.

(a) Como $(x-y)^2 \geq 0$, segue que $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$, ou seja, $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

(b) Temos

$$\begin{aligned} x^2+xy+y^2 &= \left(x^2 + \frac{2xy}{2} + \frac{y^2}{4}\right) + 3\left(\frac{y^2}{4}\right) \\ &= \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{y}{2}\right)^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Na última desigualdade, usamos que $\left(x+\frac{y}{2}\right)^2 \geq 0$ e $\left(\frac{y}{2}\right)^2 \geq 0$.

25. Como $(a-b)^2 \geq 0$, segue que $(a+b)^2 \geq 4ab$ e daí

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}.$$

Portanto, o uso reiterado dessa desigualdade nos permite concluir que

$$\begin{aligned} \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} &\geq \\ \frac{4}{a+b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} &\geq \\ \frac{16}{a+b+c}+\frac{16}{d} &\geq \\ \frac{64}{a+b+c+d}. \end{aligned}$$

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com