

Módulo Divisibilidade

MDC e MMC

6° ano E.F.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda



1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Calcule o MDC dos seguintes números.

- a) 12 e 15.
- b) 60 e 72.
- c) 120 e 180.

Exercício 2. Calcule o MMC dos seguintes números.

- a) 6, 9 e 15.
- b) 12 e 21.
- c) 45, 60 e 75.

Exercício 3. Patrícia possui 48 flores amarelas, 60 flores rosas e 72 flores vermelhas e precisa fazer arranjos de maneira que todos os arranjos tenham a mesma quantidade de flores amarelas, a mesma quantidade de flores vermelhas e a mesma quantidade de flores rosas. Quantas flores cada arranjo possuirá se a quantidade de arranjos deve ser a maior possível e todas as flores sejam utilizadas?

Exercício 4. André, Bruno e Carlos estão competindo em uma pista circular de kart. Eles largam juntos e André leva 36 segundos para completar cada volta, Bruno demora 40 segundos em cada volta e Carlos, 48 segundos. Depois de quantas voltas após a largada eles passarão juntos pelo ponto de largada?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 5. Calcule o MDC de 3200, 4000 e 3800.

Exercício 6. Para realizarmos uma adição de frações, precisamos que todos os denominadores sejam iguais. Para isso, calculamos um múltiplo comum a todos eles, de preferência o menor. Para a adição

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5},$$

qual seria o denominador comum a todos, que facilitaria nossos cálculos?

Exercício 7. Determine os valores de a e b , para que o MDC entre os números 360 e $2^a \cdot 3^b$ seja 12.

Exercício 8. Jonas, ao calcular o MDC entre dois números, acabou rasurando parte dos cálculos. Se o MDC entre estes dois números é 10 e ele recuperou parte dos cálculos, conforme a figura, quais eram estes números (representados por x e y)?

	1	2	1	12	
x	y			10	0

Exercício 9. Ana, Berta e Catarina são médicas que dão plantão em um hospital de 6 em 6 dias, 8 em 8 dias e 10 em 10 dias, respectivamente. Se hoje elas deram plantão juntas, daqui a quantos dias elas darão plantão juntas novamente?

Exercício 10. O MMC entre A e 78 é 156. Quantos são os possíveis valores de A ?

Exercício 11. Num cesto havia entre 50 e 60 ovos que, contados de 3 em 3, sobravam 2 e contados de 5 em 5 sobravam 4. Qual era o número de ovos?

Exercício 12. Uma parede retangular de 600cm de comprimento por 320cm de largura deve ser coberta com azulejos quadrados. Se deseja-se utilizar a menor quantidade possível de azulejos, qual deve ser a medida inteira, em centímetros, do seu lado? (Deve ser desprezada a espessura do rejunte)

Exercício 13. Três asteróides passaram pela Terra em 2016, sendo que Arkanoide passa de 32 em 32 anos; Bumeroide passa de 48 em 48 anos; e Clivonoide passa de 56 em 56 anos. Qual será o próximo ano que os três passarão novamente pela Terra?

Exercício 14. Seja K o menor número natural tal que $\frac{K}{2}$, $\frac{K}{3}$, $\frac{K}{4}$ e $\frac{K}{5}$ sejam números naturais. A soma dos algarismos de K é:

- a) 4.
- b) 5.
- c) 6.
- d) 7.
- e) 8.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 15. Um arquiteto está reformando uma casa. De modo a contribuir com o meio ambiente, decide reaproveitar tábuas de madeira retiradas da casa. Ele dispõe de 40 tábuas de 540cm, 30 de 810cm e 10 de 1080cm, todas de mesma largura e espessura. Ele pediu a um carpinteiro que cortasse as tábuas em peças de mesmo comprimento, sem deixar sobras, e de modo que as novas peças ficassem com o maior tamanho possível, mas de comprimento menor que 2m. Atendendo o pedido do arquiteto, o carpinteiro deverá produzir:

- a) 105 peças.
- b) 120 peças.
- c) 210 peças.
- d) 243 peças.
- e) 420 peças.

Exercício 16. Da rodoviária da cidade de Alegrelândia, saem ônibus de 75 em 75 minutos para a cidade de Vila Feliz e de 2 em 2 horas com destino à cidade de Boa Esperança.

Em um determinado dia, às 8 horas da manhã, dois ônibus saem juntos, um para cada cidade. Qual é a diferença entre o número de viagens realizadas para Vila Feliz e para Boa Esperança até o próximo horário em que dois ônibus sairão juntos novamente da rodoviária de Alegrelândia, um para cada cidade?

- a) 3.
- b) 5.
- c) 6.
- d) 8.
- e) 9.

Exercício 17. D. Laura quer decorar a maior quantidade possível de caixas com fitas azuis, brancas e vermelhas. Para decorar uma caixa, D. Laura utiliza 2 pedaços de fita azul, 4 pedaços de fita branca e 5 pedaços de fita vermelha, sendo que todos esses pedaços têm o mesmo tamanho. No momento, D. Laura dispõe de 28 metros de fita azul, 48 metros de fita branca e 60 metros de fita vermelha, que serão cortados em pedaços com o maior tamanho possível, de modo que não haja sobra. Com essas quantidades de fitas, pode-se afirmar que D. Laura poderá decorar a maior quantidade possível de caixas e sobrar(ão) apenas fita(s):

- a) branca.
- b) vermelha.
- c) azul.
- d) branca e vermelha.
- e) azul e branca.

Exercício 18. Cristina vai comemorar o aniversário de 5 anos de seu filho, Pedro, com uma festinha na escola dele. Para montar as sacolinhas surpresa, que as crianças levam para casa, Cristina, que é dona de uma papelaria, colocará os seguintes materiais escolares: lápis, borrachas, apontadores e cartelas de adesivos. Ela verificou que dispunha, em sua papelaria, de 156 lápis, 130 borrachas, 78 apontadores e 52 cartelas de adesivos. Sabendo-se que foi utilizado todo o material disponível, e que foi feito o maior número possível de sacolinhas, todas com a mesma quantidade de material, pode-se afirmar que, em cada sacolinha, a quantidade de:

- a) cartelas de adesivos é igual a um quarto da quantidade de lápis.
- b) borrachas é igual à quantidade de apontadores mais uma unidade.
- c) lápis é igual ao dobro da quantidade de apontadores.
- d) apontadores é igual à quantidade de cartelas de adesivos mais duas unidades.
- e) cartelas de adesivos é igual à metade da quantidade de borrachas.

Exercício 19. Determinar o menor número que dividido por 24, 30 e 45, deixa resto 11, 17 e 32 respectivamente.

Exercício 20. Determine o maior número pelo qual se deve dividir 1207 e 803 para obtermos os restos 7 e 3, respectivamente.

Respostas e Soluções.

1.

a) 3.

12, 15	3
4, 5	
	3 .

b) 12.

60, 72	2
30, 36	2
15, 18	3
5, 6	
	$2^2 \cdot 3 = 12$.

c) 60.

120, 180	2
60, 90	2
30, 45	3
10, 15	5
2, 3	
	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

2.

a) 90.

6, 9, 15	2
3, 9, 15	3
1, 3, 5	3
1, 1, 5	5
1, 1, 1	
	$2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$.

b) 84.

12, 21	2
6, 21	2
3, 21	3
1, 7	7
1, 1	
	$2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$.

c) 900.

45, 60, 75	2
45, 30, 75	2
45, 15, 75	3
15, 5, 25	3
5, 5, 25	5
1, 1, 5	5
1, 1, 1	
	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 900$.

3. Se as quantidades de flores de cada cor deve ser a mesma, então essa quantidade deve ser um divisor do número total de cada tipo de flores. Como a quantidade de arranjos deve ser a menor possível, devemos calcular o máximo divisor comum entre as quantidades de flores:

48, 60, 72	2
24, 30, 36	2
12, 15, 18	3
4, 5, 6	
	$2^2 \cdot 3$.

Portanto, serão $2^2 \cdot 3 = 12$ arranjos, cada um com 4 flores amarelas, 5 flores rosas e 6 flores vermelhas.

4. André completa voltas em tempos múltiplos de 36, Bruno em múltiplos de 40 e Carlos em múltiplos de 48. Eles passarão juntos pela largada nos múltiplos comuns aos três

valores. Vamos calcular o menor desses múltiplos, ou seja, o mínimo múltiplo comum:

36,	40,	48	2
18,	20,	24	2
9,	10,	12	2
9,	5,	6	2
9,	5,	3	3
3,	5,	1	3
1,	5,	1	5
1,	1,	1	
			$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$

Temos então que eles se encontrarão novamente na largada depois de $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$ segundos, ou seja, depois de $12min$.

5. Vemos facilmente que 100 é fator comum aos três. Vamos procurar os demais:

32,	40,	38	2
16,	20,	19	
			2

Temos então que o $MDC(3200, 4000, 3800) = 100 \cdot 2 = 200$.

6. O melhor denominador é o $MMC(2, 3, 4, 5)$, que é igual a:

2,	3,	4,	5	2
1,	3,	2,	5	2
1,	3,	1,	5	3
1,	1,	1,	5	5
1,	1,	1,	1	
				$2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

7. Temos que $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Como $MDC(360, 2^a \cdot 3^b) = 12 = 2^2 \cdot 3$, então a quantidade de fatores 2, no número $2^a \cdot 3^b$, deve ser 2 e a quantidade de fatores 3 deve ser 1, ou seja, $a = 2$ e $b = 1$.

8. Vamos completar os cálculos com outras incógnitas:

	1	2	1	12	
x	y	z	w	10	0

Temos então que $w = 12 \cdot 10 = 120$, $z = 1 \cdot w + 10 = 130$, $y = 2 \cdot z + w = 380$ e, por fim, $x = 1 \cdot y + z = 510$.

9. (Extraído da Vídeo Aula) Basta calcularmos o MMC entre 6, 8 e 10:

6,	8,	10	2
3,	4,	5	2
3,	2,	5	2
3,	1,	5	3
1,	1,	5	5
1,	1,	1	
			$2^3 \cdot 3 \cdot 5$

Portanto, elas darão plantão novamente depois de $2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$ dias.

10. Temos que $78 = 2 \cdot 39$ e $156 = 2^2 \cdot 39$. Para que $MMC(A, 78) = 156$, A deve ter o fator 2 exatamente 2 vezes e o fator 39 no máximo 1 vez. Então, os possíveis valores de A são dois: $2^2 = 4$ e $2^2 \cdot 39 = 156$.

11. (Extraído da Vídeo Aula) Seja N a quantidade de ovos. Se N dividido por 3 deixa resto 2, então $N + 1$ é múltiplo de 3. Da mesma forma, temos que $N + 1$ é múltiplo de 5. O primeiro múltiplo comum entre 3 e 5 é 15. Então todos os múltiplos múltiplos de 15 serão múltiplos comuns de 3 e 5 e, para o intervalo de 50 a 60 o único múltiplo de 15 é 60, que é $N + 1$. Portanto o número de ovos no cesto era 59.

12. Basta calcularmos o MDC entre 600 e 320.

320,	600	2
160,	300	2
80,	150	2
40,	75	5
8,	15	
		$2^3 \cdot 5$

Portanto, a medida inteira do lado do azulejo para utilizarmos a menor quantidade possível de azulejos é $2^3 \cdot 5 = 40cm$.

13. Os três passaram pela Terra nos múltiplos comuns de 32, 48 e 56. Como queremos o próximo ano depois da passagem em 2016, basta calcularmos o MMC destes valores:

32,	48,	56	2
16,	24,	28	2
8,	12,	14	2
4,	6,	7	2
2,	3,	7	2
1,	3,	7	3
1,	1,	7	7
1,	1,	1	
			$2^5 \cdot 3 \cdot 7$

A próxima passagem ocorrerá $2^5 \cdot 3 \cdot 7 = 672$ anos após a passagem de 2016, ou seja, em $2016 + 672 = 2688$.

14. K deve ser múltiplo simultâneo de 2, 3, 4 e 5. Temos então:

2,	3,	4,	5	2
1,	3,	2,	5	2
1,	3,	1,	5	3
1,	1,	1,	5	5
1,	1,	1,	1	
				$2^2 \cdot 3 \cdot 5$

Portanto $K = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$. Resposta C.

15. (Extraído do ENEM - 2015) Se as peças devem ter o maior tamanho possível, devemos encontrar o MDC entre 540, 810 e 1080. Como vemos facilmente que 10 é divisor comum, basta calcularmos os demais divisores comuns:

54,	81,	108	3
18,	27,	36	3
6,	9,	12	3
2,	3,	4	
			3^3

Temos então que o $MDC(540, 810, 1080) = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 270$, mas como as peças devem ter menos de $2m$, o segundo maior divisor é $5 \cdot 3^3 = 135$. Assim, o total de peças é $40 \cdot 4 + 30 \cdot 6 + 10 \cdot 8 = 420$. Resposta E.

16. (Extraído do Colégio Militar de Fortaleza - 2014) Calculando o MMC entre 75 e 120, temos:

75,	120	2
75,	60	2
75,	30	2
75,	15	3
25,	5	5
5,	1	5
1,	1	
		$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$

Assim, a segunda saída simultânea ocorrerá depois de $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = 600min = 10h$, que ocorrerá às $8 + 10 = 18h$. O número de viagens realizadas nos trechos, neste intervalo, foram 8 (Vila Feliz) e 5 (Boa Esperança), cuja diferença é 3. Resposta A.

17. (Extraído do Colégio Militar de Fortaleza - 2014) O maior tamanho possível para as fitas, podemos encontrar calculando o MDC entre 28, 48 e 60:

28,	48,	60	2
14,	24,	30	2
7,	12,	15	
			2^2

Como o $MDC(28, 48, 60) = 4$, que será o comprimento, em metros, de cada pedaço de fita, teremos $\frac{28}{4} = 7$ pedaços de

fita azul, $\frac{48}{4} = 12$ de fita branca e $\frac{60}{4} = 15$ de fita vermelha. Com essas quantidades, D. Laura conseguirá decorar um máximo de 3 caixas, sobrando apenas 1 pedaço de fita azul. Resposta C.

18. (Extraído do Colégio Militar de Brasília - 2015) Para maior quantidade de sacolas, precisamos calcular o MDC entre as quantidades de cada brinde:

156,	130,	78,	52	2
78,	65,	39,	26	13
6,	5,	3	2	
				2 · 39

Assim, serão $2 \cdot 13 = 26$ sacolas, cada uma com 6 lápis, 5 borrachas, 3 apontadores e 2 cartelas de adesivos, ou seja, a quantidade de lápis é igual ao dobro da quantidade de apontadores. Resposta C.

19. Seja N um número que dividido por 24, 30 e 45, deixa resto 11, 17 e 32 respectivamente. Temos então:

$$\begin{cases} N = 24k + 11 \\ N = 30m + 17 \\ N = 45n + 32, \end{cases}$$

onde k , m e n são números naturais. Melhorando o sistema,

chegamos a:
$$\begin{cases} N + 13 = 24k + 24 \\ N + 13 = 30m + 30 \\ N + 13 = 45n + 45. \end{cases}$$

Temos então que $N + 13$ é múltiplo de 24, 30 e 45, sendo que o menor destes múltiplos é $MMC(24, 30, 45) = 360$. Por fim, temos $N = 347$.

20. Sejam n , p e q números naturais, temos:

$$\begin{cases} 1207 = nq + 7 \\ 803 = np + 3. \end{cases}$$

Assim, $nq = 1200$, ou seja, n é divisor de 1200 e $np = 800$, ou seja, n também é divisor de 800. Como queremos o maior valor possível para n , temos $n = MDC(800, 1200) = 400$.